Speltheorie

Zit jij ook altijd zo te zwoegen op die lastige puzzels in Scoop? Om het jullie voortaan wat makkelijker te maken duikt Scoop dit maal in de speltheorie. — Dave de Jonge

Combinatorial Games

We kijken eerst naar zogenaamde *combinatorial games*: spellen met twee spelers die om de beurt aan zet zijn. Je hebt verloren wanneer je geen enkele mogelijke zet meer kan doen.

Een combinatorial game kent geen willekeurige parameters zoals de uitkomst van een dobbelsteen of een kaart die getrokken wordt. Ook is het altijd een *'game of perfect information'.* Dat wil zeggen dat je altijd exact weet wat je tegenstander doet (in tegenstelling tot bijvoorbeeld *Stratego*) en er geen gelijktijdige zetten zijn (zoals bij *steen-papier-schaar*).

De verschillende situaties die zich in het spel voor kunnen doen noemen we *posities*. Telkens wanneer één van de spelers een zet doet verplaatst het spel zich dus van de ene naar de andere positie. We kunnen een spel dan beschrijven als een verzameling van posities. En de spelregels bepalen vanuit welke positie we naar welke andere posities kunnen gaan.

We kunnen onderscheid maken tussen twee soorten combinatorial games: *partisan games* en *impartial games*. In het geval van partisan games hebben beide spelers verschillende mogelijkheden. Bijvoorbeeld het schaakspel: de ene speler mag slechts de zwarte stukken bewegen, de andere speler slechts de witte. In het geval van impartial games mogen beide spelers dezelfde zetten doen, zoals in het volgende voorbeeld.

Voorbeeld: We hebben een stapel van 21 fiches en twee spelers: Speler A en Speler B. De speler die aan de beurt is moet 1, 2 of 3 fiches van de stapel pakken. De spelers zijn om de beurt aan zet en speler A begint. De speler die het laatste fiche verwijdert is de winnaar.

Wat is nu de optimale strategie? De methode om deze vraag te beantwoorden wordt ook wel *'Backward Induction'* genoemd. We beginnen bij het eind: Stel er liggen nog maar 1, 2 of 3 fiches op tafel en speler A is aan de beurt. Speler A zal dan natuurlijk alle fiches wegnemen en daarmee het spel winnen. Maar wat als er nog 4 fiches op tafel liggen? Wat speler A ook doet hij zal zeker verliezen want er zullen hoe dan ook 1, 2 of 3 fiches op tafel overblijven voor speler B, die daarmee zal winnen.

Bij 4 fiches heeft speler A dus zeker verloren. Nu we dit weten kunnen we eenvoudig onze strategie bepalen wanneer er nog 5 fiches op tafel liggen: Speler A zal 1 fiche wegnemen zodat er nog 4 overblijven voor speler B, die daarmee verloren heeft. En als er nog 6 of 7 liggen zal speler A er respectievelijk 2 of 3 wegnemen. Met andere woorden: als er 5, 6 of 7 fiches op tafel liggen heeft speler A sowieso gewonnen. Zo doorgaand kunnen we voor ieder aantal fiches bepalen wie er wint.

Je kunt zelf nagaan dat als er een veelvoud van 4 op tafel ligt je kansloos bent. We kunnen dus concluderen dat de speler die begint de uiteindelijke winner zal zijn (mits hij geen fouten maakt): hij neemt 1 fiche weg zodat er nog 20 op tafel blijven liggen voor de ander. Dit is een veelvoud van 4 dus de tweede speler heeft verloren. Speler A hoeft er alleen maar voor te zorgen dat er na elke beurt een veelvoud van 4 op tafel blijft liggen voor Speler B. (Merk op dat de piratenpuzzel van de Scoop van maart 2008 heel goed op te lossen was met behulp van backward induction)

Om een analyse van het spel te maken en een winnende strategie te bepalen maken we onderscheid tussen zogenaamde N-posities en P-posities. N-posities zijn die posities waarbij de volgende speler die aan zet is (de N staat voor *next*) een winnende strategie heeft en P-posities zijn die posities waarbij de voorgaande speler een winnende strategie heeft (de P staat voor *previous*). Oftewel: als jij aan de beurt bent en je speelt volgens een winnende strategie dan verplaats je tijdens jouw beurt het spel van een N-positie naar een P-positie. In het voorgaande voorbeeld waren dus de situaties waarbij er een veelvoud van 4 op tafel lag de P-posities en de overige situaties waren N-posities.

We kunnen nu een winnende strategie voor een combinatorial game als volgt bepalen:

1) Label iedere terminale positie (d.w.z. er zijn geen zetten meer mogelijk) als een P-positie. Immers, de voorgaande speler heeft de laatste zet gedaan en heeft dus per definitie gewonnen.
2) Label iedere positie van waaruit je in één zet een P-positie kan bereiken als een N-positie.
3) Label iedere positie van waaruit je alleen maar een N-positie kan bereiken als een P-positie.
4) Herhaal stappen 2) en 3) totdat je geen nieuwe P-posities meer kan vinden.

Stel nu dat het spel zich in een N-positie bevindt en jij bent aan de beurt. Dan heb je een winnende strategie: je kan het spel telkens naar een P-positie verplaatsen terwijl je tegenstander het spel vervolgens slechts naar een N-positie kan verplaatsen, waarop jij het spel weer naar een P-positie verplaatst etc. Net zolang totdat je een terminale positie bereikt en je het spel hebt gewonnen.

Als we een spel hebben dat altijd na een eindig aantal zetten afgelopen is (zoals in ons voorbeeld), dan kunnen we bewijzen dat iedere positie ofwel een P-positie ofwel een N-positie is.

Stel dat een gegeven positie x geen P- en geen N-positie is (laten we dit een *neutrale positie* noemen). Dan kun je dus vanuit deze positie geen enkele P-positie bereiken. Tevens moet gelden dat niet alle posities die je wel kan bereiken N-posities zijn. Oftewel: je kan minstens één positie bereiken (positie y) die ook neutraal is. Maar voor positie y moet dan weer precies hetzelfde gelden. Je kan dan dus oneindig lang van neutrale positie naar neutrale positie bewegen. Dit is in tegenspraak met de aanname dat het spel na een eindig aantal zetten afgelopen is.

NIM

Nim is een vergelijkbaar spelletje en gaat als volgt: Er zijn wederom twee spelers die om de beurt aan zet zijn, maar ditmaal zijn er drie stapels met fiches. De speler die aan zet is moet uit exact één stapel een aantal fiches weg halen. Hij mag zelf bepalen hoeveel fiches hij weghaalt (maar wel minstens één) en hij mag ook zelf bepalen uit welke stapel hij deze fiches haalt. Opnieuw heeft degene die de laatste fiches wegneemt gewonnen.

Het aantal fiches dat op tafel ligt geven we aan met drie gehele getallen: (a, b, c). Hierbij is a het aantal fiches in de eerste stapel, b het aantal fiches in de tweede stapel en c het aantal fiches in de derde stapel. In het geval er nog maar één stapel over is bevindt het spel zich in een N-positie. De volgende speler kan immers gewoon de resterende stapel wegnemen en heeft daarmee het spel gewonnen. Als er nog twee even grote stapels over zijn is er sprake van een P-positie en als er nog twee ongelijke stapels over zijn is er sprake is van een N-positie. (Als er twee gelijke stapels over zijn kun je er alleen maar twee ongelijke stapels van maken en als er twee ongelijke stapels over zijn is het altijd mogelijk om er twee gelijke stapels van te maken.)

Als er nog drie niet-lege stapels zijn is de winnende strategie niet meer zo voor de hand liggend, maar er bestaat een zeer elegante oplossing. Hiervoor moeten we eerst de zogenaamde *Nim-Sum* definiëren.

De Nim-Sum

Zoals je weet heeft ieder geheel getal een binaire representatie, dat wil zeggen we kunnen ieder geheel getal n schrijven als: $x_m 2^m + x_{m-1} 2^{m-1} + ... + x_1 2 + x_0$ waarbij iedere x_i een 1 of een 0 is. We kunnen dit weergeven als: $x = (x_m x_{m-1} x_{m-2 ...} x_1 x_0)_2$
Bijvoorbeeld: $10 = (1010)_2$

We definieren nu de Nim-Sum van x en y als volgt:

$(x_m x_{m-1} x_{m-2 ...} x_1 x_0)_2 \oplus (y_m y_{m-1} y_{m-2 ...} y_1 y_0)_2 = (z_m z_{m-1} z_{m-2 ...} z_1 z_0)_2$

Waarbij $z_i = x_i + y_i \pmod 2$ Oftewel: $z_i = 1$ als $x_i + y_i = 1$ en anders $z_i = 0$

Voorbeeld: $22 = (\ \ 10110)_2$
$51 = (110011)_2$
------------ $\oplus$
Nim-sum: $= (100101)_2 = 37$

Je kan eenvoudig nagaan dat de Nim-sum associatief is: $(w \oplus x) \oplus y = w \oplus (x \oplus y)$ en commutatief: $x \oplus y = y \oplus x$. Tevens geldt dat 0 een identiteit is: $x \oplus 0 = 0 \oplus x = x$, ieder getal is zijn eigen inverse: $x \oplus x = 0$ en deze inverse is uniek: Als $x \oplus y = 0$ dan $x = y$.

Nu geldt de volgende **stelling**:
In het spelletje Nim is iedere positie (a, b, c) een P-positie dan en slechts dan als $a \oplus b \oplus c = 0$.

Merk op dat als we nog maar twee stapels over hebben dan geldt: $c = 0$ dus de stelling zegt dan dat $a \oplus b$ gelijk aan nul moet zijn, oftewel a = b, oftewel we hebben twee gelijke stapels.

Om te zien of de stelling klopt moeten we de volgende drie punten nagaan:

1) Als alle fiches op zijn hebben we een P-positie. Dit klopt, immers: $0 \oplus 0 \oplus 0 = 0$

2) Vanuit een P-positie kunnen we alleen maar naar een N-positie: Stel we hebben $a \oplus b \oplus c = 0$ (oftewel: $a = (b \oplus c)$) en we nemen een aantal fiches weg van de eerste stapel. Het aantal fiches dat over blijft in de eerste stapel noemen we a'. Dan geldt: $a' \neq a$, dus $a' \neq (b \oplus c)$ dus $a' \oplus b \oplus c \neq 0$.

3) Vanuit een N-positie kunnen we altijd naar een P-positie: zet de getallen onder elkaar zoals in onderstaand voorbeeld:

$$\begin{aligned} a &= (110110)_2 \\ b &= (110011)_2 \\ c &= (101001)_2 \\ &\text{----------} \oplus \\ &= (101100)_2 = 44 \end{aligned}$$

Bekijk nu de linker kolom van bits (de *most significant bits*). Verander één van de enen in een nul, bijvoorbeeld van de eerste rij. We krijgen dan:

$$\begin{aligned} a^* &= (010110)_2 \\ b &= (110011)_2 \\ c &= (101001)_2 \\ &\text{----------} \oplus \\ &= (001100)_2 = 12 \end{aligned}$$

Nu is de linker bit van de Nim-sum 0 geworden. We kunnen nu de overige bits van de eerste rij zodanig wijzigen (van 0 naar 1 of van 1 naar 0) dat de Nim-sum nul wordt:

$$\begin{aligned} a' &= (011010)_2 \\ b &= (110011)_2 \\ c &= (101001)_2 \\ &\text{-----------} \oplus \\ \text{Nim-sum:} \quad &= (000000)_2 = 0 \end{aligned}$$

Het getal $a' = (011010)_2$ dat hierdoor ontstaat is kleiner dan $a = (110110)_2$ omdat de linker bit van a' een 0 is terwijl de linker bit van a een 1 is. We kunnen dus altijd een aantal fiches van één van de stapels wegnemen zodat er a' fiches in die stapel over blijven met $a' \oplus b \oplus c = 0$.

Alice
Illustratie: Menno de Bell

Prisoner's Dilemma

Eén van de bekendste problemen uit de speltheorie is het zogenaamde *'Prisoner's Dilemma'*. Stel Alice en Bob worden allebei gearresteerd op verdenking van moord. De officier van Justitie kan helaas zijn bewijsvoering niet rond krijgen dus doet hij ze beiden een voorstel: Als jij bekent dat jullie de moord samen gepleegd hebben en je medeplichtige niet, dan ga je vrijuit. Als je medeplichtige bekent en jij niet, dan krijg je de maximale straf: 10 jaar. Als jullie beide bekennen worden jullie beide veroordeeld, maar jullie krijgen strafvermindering. Jullie moeten dan voor 8 jaar de bak in. Als jullie geen van beide bekennen dan kan ik jullie niet voor moord veroordelen, maar nog wel voor een lichter vergrijp. Dus krijgen jullie beide 1 jaar.

Hieronder een overzicht van de straf die Alice en Bob krijgen in de verschillende situaties:

Straf voor Alice:

	Alice bekent niet	Alice bekent
Bob bekent niet	1	0
Bob bekent	10	8

Straf voor Bob:

	Alice bekent niet	Alice bekent
Bob bekent niet	1	10
Bob bekent	0	8

Bob
Illustratie: Menno de Bell

Wat zullen Alice en Bob nu doen? Intuïtief zou je misschien zeggen dat ze geen van beide zullen bekennen, dan komen ze er met slechts een jaar vanaf. Echter, we gaan er vanuit dat ze op geen enkele manier met elkaar mogen communiceren, dat ze volledig uit eigenbelang handelen en dat ze hierna nooit meer in een vergelijkbare situatie terecht zullen komen.

Paradoxaal genoeg zullen ze nu allebei bekennen en zichzelf daarmee een veel hogere straf op de hals halen dan noodzakelijk. Let maar op: als Bob bekent dan kan Alice kiezen tussen een straf van 10 jaar als ze niet bekent of een straf van 8 jaar als ze wel bekent. En in het geval dat Bob niet bekent zal ze een straf van 1 jaar krijgen als ze niet bekent en is ze vrij als ze wel een bekentenis aflegt. In beide gevallen is het dus voordeliger als ze bekent. Bob zal op exact dezelfde wijze redeneren en dus zullen ze beide bekennen en beide voor acht jaar achter de tralies gaan.

Het probleem hier is dat ze geen afspraken met elkaar mogen maken. ‘Niet bekennen’ is alleen voordelig als je zeker weet dat de ander ook niet bekent. En zelfs als dat het geval is, dan is het nog steeds voordeliger om toch wel te bekennen. Er is hier sprake van een zogenaamd *‘Nash-evenwicht’* . Genoemd naar de wiskundige John Nash die voor zijn werk aan speltheorie de Nobelprijs voor de economie kreeg. Tevens is hij bekend vanwege de op zijn leven gebaseerde film *‘A Beautiful Mind’* .

Een Nash-evenwicht is een situatie waarin beide spelers geen betere situatie voor zichzelf kunnen creëren door eenzijdig van strategie te veranderen.

De praktijk

Sommige mensen beweren dat het prisoner's dilemma bewijst dat speltheorie het bij het verkeerde eind heeft omdat de uitkomst duidelijk ‘verkeerd’ is. Deze mensen vergeten echter dat het prisoner's dilemma slechts een wiskundig model is om bepaalde problemen te schetsen en daarom een zwaar vereenvoudigde voorstelling van de werkelijkheid geeft. Er wordt opzettelijk geen rekening gehouden met dingen als medeleven en schuldgevoel.

Toch vormt het prisoner's dilemma weldegelijk een bruikbare metafoor voor alledaagse problematiek. Dit wordt pijnlijk duidelijk wanneer we naar het nieuws kijken en toestanden als oorlog, hongersnood en milieurampen tegenkomen. Het blijkt maar al te vaak dat deze situaties zeer goed gemodelleerd kunnen worden m.b.v. het prisoner's dilemma. Telkens is er sprake van situaties waarin mensen liever de simpele ‘egoïstische’ oplossing kiezen in plaats van samen te werken met het gevolg dat uiteindelijk iedereen verliest. Ook verklaart het prisoner's dilemma bijvoorbeeld waarom het soms voor grote bedrijven beter is om te fuseren.

Kortom: speltheorie is een zeer breed inzetbaar vakgebied binnen de wiskunde dat een sterk theoretische kant heeft maar ook vele economische en maatschappelijke toepassingen kent.