

Knotsgek

Velen van jullie hebben mij regelmatig in de bieb zien zitten zwoegen achter een tafel vol papieren met allerlei rare tekeningetjes van knopen. Dat leverde nogal wat verbaasde blikken en vragende gezichten op. Dat kun je toch geen serieuze wiskunde noemen?. Maar ja, hoe leg je eventjes in een paar minuten uit waar je zelf al meer dan een jaar mee bezig bent? Dus werd het maar eens tijd voor een artikel over knopentheorie in de Scoop. — Dave de Jonge

Wat is een knoop?

Een knoop is simpel gezegd een touwtje dat in de knoop ligt, met beide uiteinden aan elkaar vastgeplakt. Wiskundiger gezegd: een inbedding van S^1 in $\mathbb{R}^3$. De veters in je schoen vormen dus geen knoop, omdat de uiteinden los zitten. Als je de uiteinden van je veter aan elkaar zou plakken dan is het wel een knoop. Twee knopen zijn verschillend als je de ene niet in de andere kan veranderen zonder te knippen en te plakken.

De simpelste knoop is de zogenaamde 'triviale knoop' en heeft geen kruispunten. De één na simpelste knoop heeft drie kruispunten en wordt de trefoil-knot genoemd:

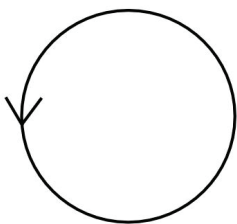


Diagram 1:
De triviale knoop

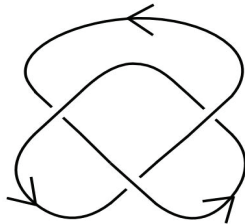


Diagram 2:
De trefoil-knot

Dit soort tekeningetjes worden knoopdiagrammen genoemd. Het is duidelijk dat we de trefoil-knot nooit uit de knoop kunnen halen zonder in het touwtje te knippen.

Ieder knoopdiagram hoort bij één unieke knoop, maar iedere knoop heeft oneindig veel verschillende diagrammen. De diagrammen 3 en 4 zijn bijvoorbeeld diagrammen van de triviale knoop:

Het is natuurlijk leuk dat we tekeningen van knopen kunnen maken, maar wiskundigen houden daar

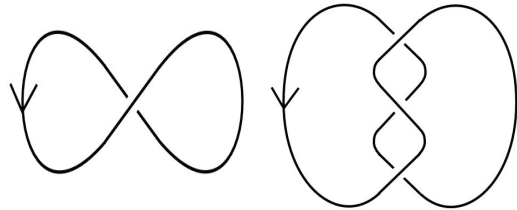


Diagram 3:
De triviale knoop

Diagram 4:
De triviale knoop

niet zo van. Wiskundigen hebben liever formules. Het doel van de knopentheorie is dan ook om alle mogelijke knopen op een wiskundige manier te beschrijven en te onderscheiden. Dit doen we bijvoorbeeld door een algoritme te verzinnen om aan ieder knoopdiagram een polynoom toe te kennen (een zgn. knoopinvariant). De moeilijkheid hierin is dat we dan wel moeten zorgen dat als twee diagrammen bij dezelfde knoop horen ze ook hetzelfde polynoom opleveren. Het is immers de bedoeling dat we aan iedere knoop een uniek polynoom toekennen, onafhankelijk van het diagram dat we kiezen.

Eén van de belangrijkste de stellingen uit de knopentheorie is van Reidemeister. Die zegt dat twee knoopdiagrammen bij dezelfde knoop horen dan en slechts dan als we het ene diagram in het andere kunnen veranderen door de volgende transformaties een eindig aantal keer uit te voeren:



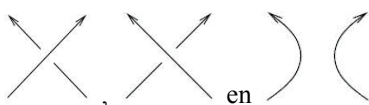
Dit worden de Reidemeister moves genoemd. We zien bijvoorbeeld dat we diagram 1 in diagram 3 kunnen transformeren d.m.v. een RI move. En we kunnen diagram 1 in diagram 4 veranderen d.m.v.

een RI en een RII move. We kunnen diagram 1 met deze drie moves echter nooit in diagram 2 transformeren, want de triviale knoop en de trefoil-knot zijn verschillende knopen.

Het Jones polynoom

De bekendste knoopinvariant is het Jones polynoom. Het Jones polynoom van de triviale knoop is per definitie 1. Het bepalen van het Jones polynoom van een willekeurige andere knoop gaat als volgt:

Stel we hebben drie knoopdiagrammen D , D' en D'' . Deze diagrammen zijn identiek, behalve in één kruispunt dat we p noemen. In p zien de diagrammen er respectievelijk uit als:



De Jones polynomen van deze diagrammen geven we aan met resp. $J(D)$, $J(D')$ en $J(D'')$. Voor deze drie polynomen geldt dan per definitie de volgende vergelijking:

$$x^{-2}J(D) - x^2J(D') = (x - x^{-1})J(D'')$$

Merk op dat D'' één kruispunt minder heeft dan D en D' . D'' lijkt dus iets meer op de triviale knoop. En als we p een beetje slim kiezen dan lijkt D' ook meer op de triviale knoop dan D . We hebben dus een formule waarmee we $J(D)$ kunnen uitdrukken als functie van de Jones polynomen van twee simpelere diagrammen. Als we dit nu herhaald toepassen dan vinden we uiteindelijk een uitdrukking waarin $J(D)$ alleen nog maar een polynoom is in de variabele x . Als D bijvoorbeeld het bovenstaande plaatje van de trefoilknoop is en p het onderste kruispunt, dan zien we dat D' een diagram van de triviale knoop is.

Het blijkt dat dit voldoende is om aan iedere knoop een polynoom toe te kennen. Helaas werkt het Jones polynoom niet zo goed als we zouden willen. Probleem is namelijk dat er ook voorbeelden zijn van twee verschillende knopen met hetzelfde Jones polynoom. Als we twee diagrammen hebben met verschillend Jones polynoom weten we dus zeker dat ze bij verschillende knopen horen, maar an-

dersom werkt niet: als twee diagrammen hetzelfde Jones polynoom hebben weten we nog niet zeker of ze ook bij dezelfde knoop horen.

Hoe vinden we zo'n knoop invariant?

Het berekenen van het Jones polynoom is zoals je ziet vrij eenvoudig. Toch schuilt hier zeer complexe wiskunde achter. We kunnen de touwtjes namelijk ook beschouwen als lineaire afbeeldingen tussen vectorruimten. Deze afbeeldingen moeten aan bepaalde eisen voldoen om te zorgen dat ze tot een knoopinvariant leiden. Deze eisen zijn equivalent met te zeggen dat het afbeeldingen tussen representaties van quantum groepen moeten zijn (zie Scoop Sep. 2007 De ontdekking van... voor uitleg quantum groepen).

Khovanov homologie

Een knoop invariant die nog maar enkele jaren bestaat (en onderwerp van mijn scriptie is) is de Khovanov homologie. Deze invariant is een zogenaamde categorificatie van het Jones polynoom. Categorificatie is een wiskundige techniek waarbij gehele getallen vervangen worden door vectorruimtes. Zo wordt bijvoorbeeld het getal 3 vervangen door een 3-dimensionale vectorruimte. En i.h.a. wordt een geheel getal n vervangen door een n -dimensionale ruimte. Het grappige hieraan is dat allerlei bewerkingen met getallen op natuurlijke wijze mee transformeren. De uitdrukking $3 + 2 = 5$ bijvoorbeeld wordt dan:

$$\mathbb{R}^3 \oplus \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^5$$

En $3 \cdot 2 = 6$ wordt:

$$\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^6$$

Als we dit toepassen op het Jones polynoom dan wordt dit een rijtje vectorruimten met lineaire afbeeldingen daartussen (een zgn. chain complex). De Khovanov homologie is beter in het onderscheiden van knopen. D.w.z er zijn knopen met hetzelfde Jones polynoom maar met verschillende Khovanov homologie, terwijl knopen met verschillend Jones polynoom ook altijd verschillende Khovanov homologie hebben.

Toepassingen

Maar waar is dat nou allemaal goed voor? Ten eerste is het natuurlijk gewoon hartstikke leuke wiskunde. Wiskundigen moeten nou eenmaal ook iets

te doen hebben. Maar daarnaast zijn er wel degelijk een aantal praktische toepassingen.

Eén van de grondleggers van de knopentheorie was Lord Kelvin die een atoommodel probeerde op te stellen op basis van knopentheorie. Hij stelde voor dat atomen eigenlijk in de knoop liggende elektrische veldlijnen zijn. Verschillende knopen zouden dan verschillende chemische elementen opleveren. Helaas bleek deze theorie niet te kloppen.

DNA-technologie: om niet al te veel ruimte in de celkern in te nemen moeten DNA-strengen zwaar opgerold en in de knoop liggen. Op het moment dat bepaalde dna fragmenten gekopieerd moeten worden moet het dna eerst uit de knoop gehaald worden door het in stukjes te knippen, hiervoor zijn bepaalde enzymen verantwoordelijk. Biologen gebruiken knopentheorie om dit proces te onderzoeken.

Quantum computers: een topologische quantum computer is een variant op de gewone quantum computer. Deze maakt gebruik van deeltjes die zich alleen in een 2-dimensionaal vlak kunnen bewegen. Als we de wereldlijnen van enkele van zulke deeltjes in een 2+1-dimensionale tijd-ruimte tekenen

dan worden dit om elkaar heen gewikkelde lijnen, een knoop dus.

Topologische string theorie: het blijkt dat de vectorruimtes die we verkrijgen bij het categorificeren van knoopinvarianten beschouwd kunnen worden als de Hilbert ruimte van quantummechanische toestanden van strings. Een halve knoop correspondeert dan met een zgn. brane en de knoop die ontstaat door twee halve knopen aan elkaar te plakken correspondeert dan met de ruimte van alle strings die tussen die twee branes lopen.

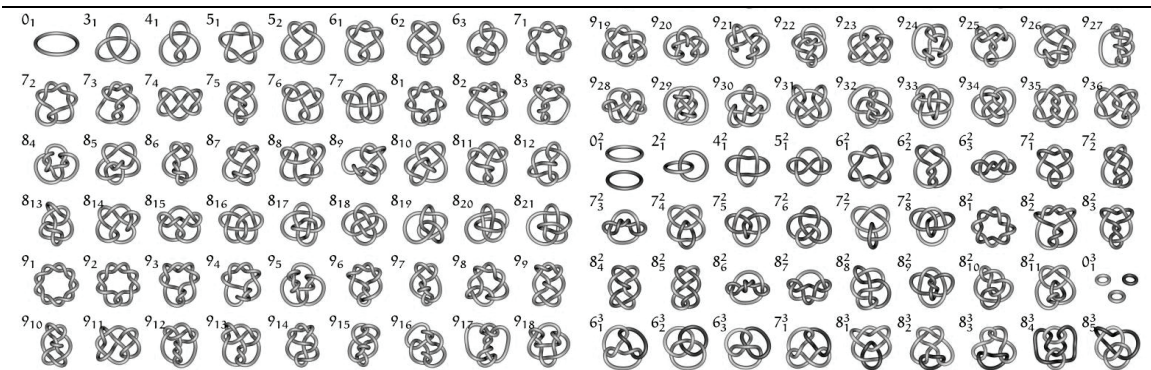
Verder zijn knopen belangrijk omdat ze direct te maken hebben met quantum groepen, die op hun beurt weer belangrijk zijn in de theoretische natuurkunde. En ook spelen knopen een belangrijke rol in Loop Quantum Gravity, de belangrijkste concurrent van string theorie om een quantumtheorie voor de zwaartekracht te beschrijven.

Meer over knopen:

<http://library.thinkquest.org/12295/>

<http://www.knotplot.com/>

http://katlas.math.toronto.edu/wiki/Main_Page



Figuren van knopen

Meer figuren en plots van knopen zijn te vinden op www.knotplot.com