

TESI DOCTORAL

**CONTRIBUCIÓ A L'ESTUDI DE MODELS
D'INFERÈNCIA EN ELS SISTEMES
POSSIBILÍSTICS**

LLUÍS GODO i LACASA

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
PROGRAMA DE DOCTORAT EN INTEL·LIGÈNCIA ARTIFICIAL

JUNY 1990

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
PROGRAMA DE DOCTORAT EN INTEL·LIGÈNCIA ARTIFICIAL

TESI DOCTORAL

**CONTRIBUCIÓ A L'ESTUDI DE MODELS D'INFERÈNCIA
EN ELS SISTEMES POSSIBILÍSTICS**

JUNY 1990

Memòria presentada per en Lluís Godo i
Lacasa per optar al grau de Doctor en
Informàtica.

Director: Dr. Llorenç Valverde i Garcia

Als meus pares.

A Mercè, Anna i Lluís.

RESUM

El model possibilístic és un model de raonament aproximat que té per objectiu especial el tractament de la informació imprecisa i/o vague, i que es serveix del formalisme dels conjunts difusos per tal de representar aquest tipus d'informació. Bàsicament, en aquesta memòria es troba primer un estudi de la inferència en les lògiques funcionals multivaluades a $[0,1]$, que són les subjacents a la teoria dels conjunts difusos, i en segon lloc, la seva aplicació per a definir mecanismes d'inferència en els sistemes possibilístics.

Més concretament, en el primer capítol i dins del marc de les lògiques multivaluades a $[0,1]$, s'analitza la dualitat "implicació material / regla d'inferència de Modus Ponens", a partir de l'axiomàtica de les funcions d'implicació i de la formulació funcional del Modus Ponens a través de les anomenades "funcions generadores de modus ponens".

Seguidament, en la primera part del segon capítol es demostra que les lògiques multivaluades poden ser formalitzades com a famílies d'institucions quan es consideren els valors de veritat com a una part pròpia integrant dels enunciat de la lògica. Cada família ve determinada per una classe d'àlgebres de valors de veritat. Això permet tenir un sistema de deducció semàntica en el sentit clàssic, i que a la vegada, com és usual, permet definir un sistema de conseqüències entre enunciat. La segona part del capítol està dedicat al estudi i formulació d'esquemes d'inferència a partir del anterior sistema de conseqüències, susceptibles de ser utilitzats en sistemes de deducció automatitzats, els quals tindran assegurada la correctesa respecte al sistema semàntic.

Ja en el marc dels sistemes possibilístics, en el tercer capítol i en primer lloc, es dona, a partir de resultats del primer capítol, una caracterització del principal mecanisme d'inferència en aquests sistemes, l'anomenada Regla Composicional d'Inferència, també coneguda com Modus Ponens Generalitzat. A continuació s'analitza i es justifica com la introducció de les funcions de compatibilitat entre distribucions de possibilitat permet donar una formulació alternativa del mecanisme d'inferència a través de les Funcions d'Inferència Directa, i es demostra que, sota determinades condicions, aquestes tenen estructura d'operador conseqüència. Seguidament, es mostra que les característiques especials de les funcions de compatibilitat fan que es puguin considerar com a valors de veritat a la lògica difusa i, sota aquesta perspectiva, es donen les bases d'un càlcul lògic amb aquestes funcions.

Finalment, en el últim capítol es planteja el problema de com obtenir un càlcul quan hi ha la restricció de treballar amb un nombre finit de valors, com podria ser el cas d'un motor d'inferències d'un sistema expert. Això porta a analitzar el problema de la generació i el·licitació d'operadors d'una lògica finitament valuada, és a dir, com generar àlgebres d'un conjunt finit de valors de veritat, i es proposa resoldre-ho com un problema de satisfacció de restriccions.

Paraules clau

Models de Raonament Aproximat, Inferència, Lògica Multivaluada,
Model possibilístic, Lògica Difusa, Gestió de la incertesa, Institucions

ABSTRACT

The possibilistic model is an approximate reasoning model. Its aim is to deal with fuzzy information using the theory of fuzzy sets as representation formalism. In this thesis we study inference mechanisms in possibilistic systems, starting from the functional multivalued logics which underly fuzzy sets .

The first chapter contains an analysis of the "material implication / modus ponens" relationship in the framework of $[0,1]$ -valued logics. The analysis is carried out from the implication functions axiomatics and the modus ponens functional formulation by means of the so-called modus ponens generation functions.

In the first part of chapter two, multivalued logics are formalized as families of "institutions", truth-values being considered to be an integral part of logical sentences. Each class of truth-values algebras determines an institution family. This provides us with a semantic deduction system in the classical sense which, at the same time, allows the definition of an entailment relation between sentences. The second part of the chapter is devoted to the formulation and study of inference schemes based on the above mentioned entailment relationship, so that, when used in automated deduction systems, they will be sound with respect to its semantic system.

General possibilistic systems are taken into consideration in chapter three. First of all, we characterize their main inference mechanism, the so called Compositional Inference Rule, also known as Generalized Modus Ponens. Then, an alternative formulation of this inference mechanism by means of Forward Inference Functions is analyzed and justified using the compatibility functions between possibility distributions. We also prove that, under certain circumstances, the Forward Inference Functions have the structure of a consequence operator. The special characteristics of compatibility functions allow them to be considered as the truth-values of fuzzy logic. We provide a basis for a logical calculus by using these functions.

Finally, in chapter four, we study how to obtain a calculus under the constraint of having to work with a finite number of truth-values, as may happen in expert systems inference engines. This study will lead us to analyze the problem of generating and eliciting operators of a finite valued logic, i.e. how to generate algebras for a finite set of truth-values. We propose to solve this problem as a constraint satisfaction problem.

Keywords

Approximate Reasoning Models, Inference, Multiple-valued Logic, Possibilistic Model, Fuzzy Logic, Uncertainty Management, Institutions

Agraïments.

El treball que recull aquesta memòria ha estat fruit de moltes converses i discussions amb els companys que sempre m'han envoltat, tant els del Departament de Matemàtiques i Informàtica de la E.T.S.A.B. on es va iniciar, com els del Centre d'Estudis Avançats de Blanes on ha pres forma i s'ha finalitzat. Vull manifestar el meu sincer agraïment a tots ells, i en especial :

- Al professor Llorenç Valverde per acceptar la direcció d'aquesta memòria, i portar-la a bon port, a pesar dels imponderables Vull agrair-li el seu recolzament al llarg del temps que ha durat l'elaboració d'aquesta memòria, així com les seves idees i suggerències que han sigut de gran ajut.
- Al professor Francesc Esteva, director del C.E.A.B., per el seu constant encoratjament, i per les fructíferes discussions mantingudes arran diversos aspectes d'aquest treball. Aquest agraïment el faig extensiu al professor Joan Jacas per el seu suport, especialment en l'elaboració del tercer capítol d'aquesta memòria.
- Al professor Ramón López de Màntaras, cap de la unitat d'Intel·ligència Artificial del C.E.A.B., per haver-me introduït en el "món" de la investigació.
- A l'amic i company Pere Garcia. Sense el seu ajut, ja fóra amb crítiques dures, encertades suggerències, correccions o en la plasmació final d'aquest document, la realització d'aquesta memòria hagués estat una tasca impossible
- Al company Carles Sierra, per el seu ajut en tot moment, i per ser el principal culpable, juntament amb en Pedro Meseguer, de veure materialitzades en el món real algunes de les idees aquí exposades.
- Als professors Enric Trillas, Josep Aguilar i Jaume Agustí per les seves sempre interessants discussions i suggerències

Aquesta tesi ha rebut suport dels següents projectes científics:

- * Projecte 1503-82 de la CAICYT
- * ACRE, Projecte 836 del CSIC-CAYCIT
- * Accions Integrades 27/16-B i 44-B amb la Universitat de Dortmund (R.F.A.)
- * DRUMS, Project 3 of ESPRIT-II Basic Research Action

ÍNDIX

Capítol 0. INTRODUCCIÓ.

1. Models de Raonament Aproximat.....	1
2. Tractament de la Incertesa.....	2
3. Tractament de la Vaguetat.....	5
4. El Model Possibilístic.	8
5. Objectiu i Contingut de la Memòria.....	11

Capítol 1. IMPLICACIONS I FUNCIONS GENERADORES DE MODUS PONENS.

1. Introducció.....	14
2. Funcions d'Implicació.....	15
3. Funcions generadores de Modus Ponens per a una implicació.....	19
4. Implicacions per a una funció generadora de Modus Ponens.....	23
5. Relació entre el connectiu conjunció, el connectiu implicació i la funció generadora de Modus Ponens associada.	28

Capítol 2. LES LÒGIQUES MULTIVALUADES EN EL MARC DE LES INSTITUCIONS.

1. Introducció.....	30
2. Formalització de les Lògiques Multivaluades com a famílies d'Institucions... 34	
2.1. Àlgebres de valors de veritat.	35
2.2. LS-Institucions.....	39
2.3. Morfismes entre LS-Institucions.....	43
3. LS-Institucions i Esquemes d'Inferència.....	45
3.1. Esquemes de Modus Ponens.....	47
3.2. Esquemes de Resolució.....	53

Capítol 3. INFERÈNCIA EN LÒGICA DIFUSA.

1. Introducció.....	62
2. Fonaments de la Regla Composicional d'Inferència.....	64
3. Funcions de compatibilitat i Qualificacions Veritatives.....	67
3.1. Les funcions de compatibilitat com a una mesura relativa de conformitat.	70
3.2. De les funcions de compatibilitat a les qualificacions veritatives....	71
3.3. Les qualificacions veritatives com a modificadors.....	72
4. Funcions de Raonament Directe.....	74
4.1. Funcions de Raonament Directe per a R-implicacions.	77
4.2. Funcions de Raonament Directe per a S-implicacions.....	81

4.3. Exemples.	83
5. Càlcul amb qualificacions veritatives.	83
5.1. Conjunció.....	84
5.2. Disjunció.....	86
5.3. Implicació.....	88
5.4. Negació.	89
5.5. Altres tipus de transformacions.	91
5.5.1. Complementació.....	91
5.5.2. Negació-complementació.....	92
6. Inferència amb regles qualificades. Adaptació de la Regla Composicional d'Inferència.....	93
7. Funcions de Raonament Directe Qualificat.....	95
7.1. Funcions de Raonament Directe Qualificat amb R-implicacions. Operadors Conseqüència.	99
7.2. Inferència qualificada i operació conjunció.	101

Capítol 4. CÀLCUL AMB UN NOMBRE FINIT DE VALORS.

GENERACIÓ D'OPERADORS.

1. Introducció: generació i el·licitació d'operadors.....	103
2. Treballs previs.....	104
3. La generació d'operadors com a un problema de satisfacció de restriccions..	106
3.1. Problemes de satisfacció de restriccions.	107
3.2. Identificació de variables, dominis i restriccions en el problema dels operadors.....	108
4. Aplicació a la generació d'una classe general d'operadors.....	109
4.1. Conjunt de restriccions opcionals.....	109
4.2 Exemple.....	111
5. Aplicació a la generació d'operadors conjunció.	112
5.2. Resultats.	114
6. El·licitació del operador.	116
6.1. Selecció posterior. Interacció guiada.	116
6.2 Exemple d'interacció	117
7. Aplicacions.	123

CONCLUSIONS I PERSPECTIVES..... 124

Apèndix 1. NORMES I CONORMES TRIANGULARS.

FUNCIONS DE NEGACIÓ

1. t-normes i t-conormes: generalitats.	126
--	-----

2. Quasi-inverses de t-normes i t-conormes.	129
3. Funcions de negació.....	131
Apèndix 2. EL SISTEMA PRINCESS	
1. Característiques lògiques.....	133
1.2. Problemàtica.....	133
1.2. Tècniques introspectives.....	135
2. Llenguatge de representació a PRINCESS	135
BIBLIOGRAFIA.	138

Capítol 0 : INTRODUCCIÓ

1. Models de Raonament Aproximat.

És ben conegut que els mecanismes de la lògica clàssica permeten formalitzar el raonament en el supòsit que la informació disponible permeti determinar la veracitat o falsedat dels enuncisats en consideració. És obvi que aquesta hipòtesi no sempre és vàlida. Per aquesta raó, ja des d'Aristòtil, s'han cercat sistemes formals més amplis per tal de tractar aquest problema. L'exemple més conegut i més desenvolupat segurament és el de les lògiques multivaluades i el de les lògiques modals.

Pel que fa al camp de la Intel·ligència Artificial, la necessitat de que els anomenats Sistemes basats en Coneixements puguin representar, tractar i raonar amb informació incompleta, incerta o imprecisa, fa evident que el rígid formalisme de la lògica clàssica no sigui el més adient. D'altra banda, no s'ha trobat encara un formalisme general que dongui una solució adequada a tots i a cadascun dels problemes derivats de la representació i manipulació d'aquests tipus d'informació.

És per aquesta raó que des de la Intel·ligència Artificial s'ha impulsat l'estudi de diferents formalismes, complementaris i/o alternatius als de la lògica clàssica, per tal de proporcionar models, encara que particulars, de representació i raonament amb els diferents tipus de coneixements abans esmentats. Aquests models són generalment anomenats "models de raonament aproximat". Alguns d'aquests models es basen en formalismes que ja havien estat introduïts amb molta anterioritat al naixement de la Intel·ligència Artificial. Entre ells estan els basats en la teoria de la probabilitat, els basats en les lògiques modals i els basats en lògiques multivaluades, etc.. En canvi, d'altres són procediments que s'han basat principalment en consideracions de tipus heurístic, i que posteriorment s'els hi ha cercat o s'els hi cerca encara un marc formal. Un exemple d'aquestes interrelacions es pot trobar en uns recents resultats (Ruspini, 1985) que estableixen una connexió directa entre el model de raonament evidencial de Dempster-Shafer (Shafer, 1976) i les lògiques modals epistèmiques.

Si hom vol donar una classificació dels models de raonament aproximat cal tenir en compte el tipus de tractament, simbòlic o numèric, que el model fa de la informació, o bé el tipus de lògica que suporta al model, que pot ser una extensió o una desviació de

la lògica clàssica. Segons Haack (Haack, 1974) s'entén que una lògica L és una extensió d'una altra lògica L' si els teoremes de L també són teoremes de L' , mentre que en cas contrari es diu que L és una desviació de L' . Així, la lògica autoepistèmica (Moore, 1980) és una lògica modal no monòtona que modelitza el conjunt de creences que poseeix un agent racional ideal, reflectint allò que coneix i allò que no coneix; en canvi el model evidencial de Dempster-Shafer és un model quantitatiu que mesura el grau de credibilitat subjectiva que indueix l'evidència en un agent racional. Tant la lògica autoepistèmica com el model evidencial de Dempster-Shafer són extensions de la lògica clàssica. De fet, el model de Dempster-Shafer és una extensió de la lògica probabilística, que a la vegada pot ser considerada com una extensió de la clàssica. D'altra banda, exemples de desviacions de la lògica clàssica poden ser la lògica multivaluada o la lògica difusa.

2. Tractament de la Incertesa.

La majoria dels models que permeten tractar amb informació incerta són numèrics degut, d'una part, a la facilitat d'ús i manipulació, i de l'altra, al seu poder expressiu a l'hora d'assignar graus de certesa als elements d'una base de coneixements.

Cadascun dels models numèrics proposa, en general, un tipus especial de mesura. En la hipòtesi de que els enunciats a mesurar siguin "ben definits", és a dir, que el conjunt d'enunciats es pugui estructurar com una àlgebra de Boole, hom s'ha posat d'acord en les mínimes condicions a exigir a tals mesures, donant lloc a les anomenades "mesures d'incertesa" (Prade, 1985). Aquestes mesures són funcions $g: \mathbf{B} \rightarrow [0,1]$ d'una àlgebra de Boole $\mathbf{B} = (B, \vee, \wedge, \neg, T, F,)$ a l'interval unitat, tals que satisfan les següents condicions:

$$(1) g(F) = 0$$

$$(2) g(T) = 1$$

$$(3) g(p) \leq g(q), \text{ si } \neg p \vee q = T$$

Aquests axiomes defineixen una classe molt àmplia de mesures. Afegint-hi axiomes addicionals s'obtenen mesures tan conegudes com les de credibilitat / plausibilitat, les de probabilitat i les de necessitat / possibilitat..

En efecte, si s'hi afegeix el següent axioma

$$(4) \quad g(p_1 \vee \dots \vee p_n) \geq \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} g(\bigwedge_{i \in I} p_i), \text{ per a tot } n \in \mathbb{N}$$

s'obtenen les anomenades mesures de credibilitat, i per dualitat les anomenades de plausibilitat. És a dir, si g és una mesura de credibilitat, aleshores g^* definida per $g^*(p) = 1 - g(\neg p)$ és una funció de plausibilitat.

Si a l'axioma (4) s'imposa la igualtat tenim

$$(4') \quad g(p \vee q) = g(p) + g(q), \text{ si } p \wedge q = F,$$

és a dir, l'axioma de l'additivitat, i aleshores g és una mesura de probabilitat.

D'altra banda, si l'axioma que s'hi afegeix és

$$(4'') \quad g(p \vee q) = \max(g(p), g(q))$$

aleshores g és una mesura de possibilitat, mentre que si l'axioma és

$$(4''') \quad g(p \wedge q) = \min(g(p), g(q))$$

g és una mesura de necessitat. Per dualitat, tota mesura de possibilitat dóna lloc a una mesura de necessitat, i recíprocament. Recordem que si g és una mesura de possibilitat (resp. necessitat), g' definida per

$$g'(p) = 1 - g(\neg p)$$

és una mesura de necessitat (resp. possibilitat).

Les mesures de probabilitat i les de possibilitat / necessitat són casos particulars de mesures de credibilitat / plausibilitat, tal com es pot deduir fàcilment dels seus axiomes.

En el cas que l'àlgebra de Boole sigui finita, aquests tipus de mesures tenen l'avantatge de ser generades per una funció d'assignació de masses sobre l'àlgebra de Boole. És més, existeix una bijecció entre aquestes funcions i les funcions de credibilitat, i per tant, també entre elles i les funcions de plausibilitat. Una funció $m: \mathbf{B} \rightarrow [0,1]$, tal que

$$\sum_{p \in \mathbf{B}} m(p) = 1$$

s'anomena funció d'assignació de masses sobre l'àlgebra de Boole **B**. Donada una funció d'assignació de masses m sobre **B**, aleshores les funcions

$$g^*(p) = \sum_{\neg p \vee q = T} m(q) \quad g_*(p) = \sum_{p \wedge q \neq F} m(q)$$

són respectivament la funció de credibilitat i la de plausibilitat dual generades per m .

Les mesures de probabilitat i les de possibilitat /necesitat s'obtenen quan el conjunt d'elements focals $\{ p \in B / m(p) > 0 \}$ forma una partició o una cadena respectivament; com es representa en la següent figura:

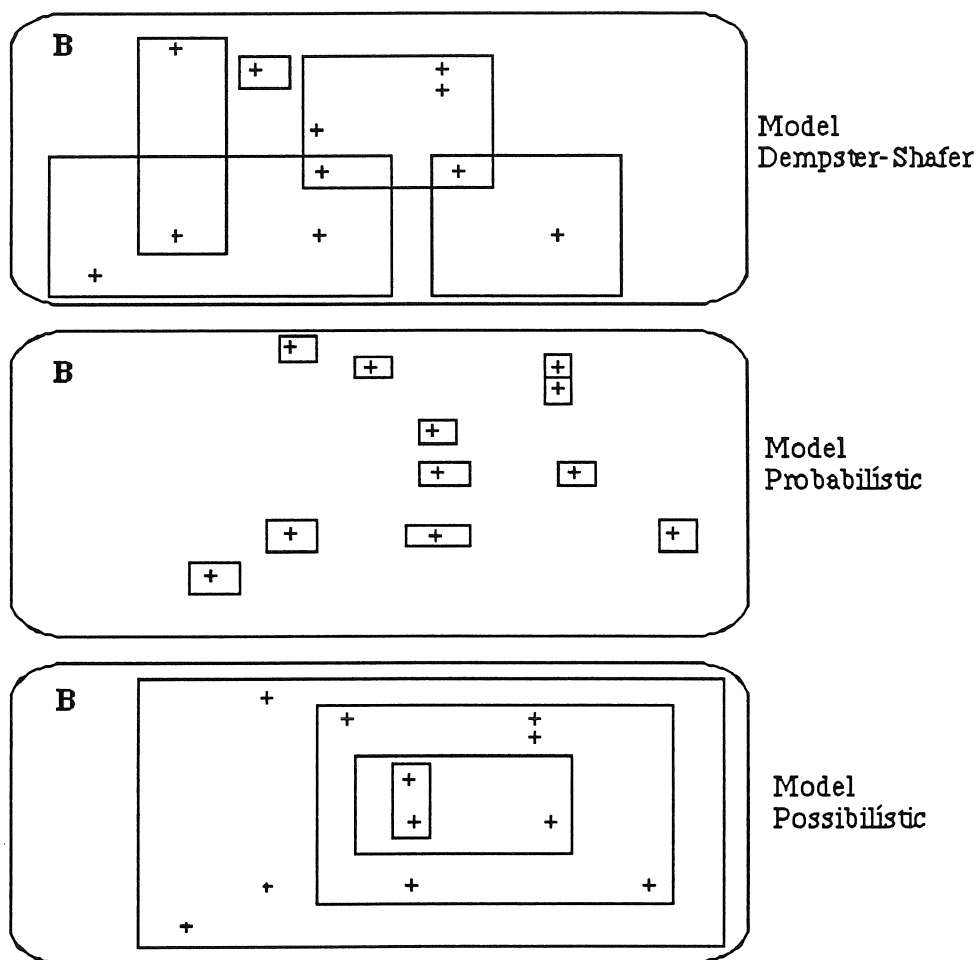


fig. 1

En general les mesures anteriors no són funcionals, en el sentit que no existeix un conjunt d'operacions sobre $[0,1]$ tals que g sigui un morfisme entre l'àlgebra de Boole **B** i $[0,1]$, exceptuant el cas en que $g(B) \in \{0,1\}$. Aquesta no funcionalitat comporta

inconvenients des del punt de vista computacional. Per tant, hom podria intentar trobar mesures funcionals però, segons es demostra en (Sales, 1982) i (Dubois, Prade; 1988c), tret del cas assenyalat, això és impossible si l'àlgebra de Boole no és la trivial.

3. Tractament de la Vaguetat.

El principal problema que es planteja a l'hora de tractar la vaguetat en la informació que és inherent al llenguatge natural, és quin concepte de veritat és aplicable. Tarski, en la seva teoria semàntica de la veritat (Tarski, 1944), diu que la seva solució a la definició de veritat és "rigurosa" per a llenguatges tals que la seva estructura hagi estat "exactament especificada", i és "aproximada" per als llenguatges naturals.

El llenguatge natural en general no està "especificat exactament", ni sintàctica ni semànticament. Els enunciats sintàcticament mal formats no són problemàtics des del punt de vista tarskià, ja que no hi ha cap raó per associar-los-hi valors de veritat. Si un enunciat és sintàcticament ambigu entre dos o més lectures, l'enfoc de Tarski permet assignar un valor de veritat a cada lectura per separat.

Per contra, els enunciats semànticament mal especificats o imprecisos ho són pel fet de contenir diferents tipus d'expressions vagues, incluint-hi predicats (gran, jove, etc.), modificadors (quasi, aproximadament, etc.), i quantificadors (molts, pocs, etc.), plantejant en aquest cas problemes més interessants i difícils a la semàntica clàssica.

En alguns casos, l'ús d'expressions vagues està basat essencialment en raons epistèmiques: encara que el nostre llenguatge L sigui semànticament imprecís, existeix una extensió L' de L semànticament precisa. Tot i que L' dongués precisió a l'ús d'expressions de L , el llenguatge L' pot no ser útil per raons pràctiques (per exemple, el cost de precisar pot ser massa car, o pot ser difícil mesurar els conceptes de L'). Aquest procediment de passar d'expressions vagues a les seves corresponents expressions exactes Carnap el va anomenar *explication* (Carnap, 1949).

Així doncs, la vaguetat epistèmica no presenta en principi tampoc problemes molt complicats a la teoria de la veritat. Un enunciat vague d'un llenguatge L es converteix en una disjunció d'enunciats precisos en la extensió precisa L' de L , i per tant, sobre aquesta disjunció és aplicable la definició tarskiana de certesa.

Ara bé, a vegades els contorns o fronteres donats pel mètode d'explicació semblen molt arbitraris (per exemple, "X és calb si X té menys de 200 cabells al seu cap", "la majoria d'A són B si, i només si, com a mínim el 90 % d'A són B"). Algunes expressions no

semblen doncs admetre fàcilment una explicació. La raó és que són expressions inherentment o semànticament vagues. En aquests casos, no hi ha una caracterització precisa del seus significats que podria fixar de forma unívoca les seves interpretacions en la realitat (món real).

Una possible solució que es presenta en el cas d'indeterminisme semàntic és introduir un nou valor de veritat ('indeterminat') a més de 'cert' i 'fals'; això porta a lògiques a tres valors, com les de Lukasiewicz o Kleene. En canvi, en les lògiques infinitament valuades, un enunciat pot tenir com a valor de veritat qualsevol nombre entre $[0,1]$. Com és ben conegut, per exemple, en la lògica standard de Lukasiewicz L_∞ , els valors de certa per a enunciats compostos es defineixen per les següents regles:

$$v(\neg p) = 1 - v(p)$$

$$v(p \wedge q) = \min(v(p), v(q))$$

$$v(p \vee q) = \max(v(p), v(q))$$

$$v(p \rightarrow q) = \min(1, 1 - v(p) + v(q))$$

Aquestes condicions poden ser considerades com a regles per a determinar les extensions difuses de fòrmules atòmiques amb predicats vagues. Així per exemple, si M és un predicat vague unari, es pot definir la extensió difusa de M a través de la funció característica

$$\mu_M(a) = v(M(a))$$

és a dir, si considerem per exemple el predicat “alt”, que aplica sobre alçades, el grau de pertinença d'una alçada, diguem 1.70 cm, al conjunt difús “alt” és igual al grau de veritat de la proposició “ser alt” quan l'alçada és 1.70 cm..

Per a fòrmules compostes les extensions es definirien com:

$$\mu_{\neg M}(a) = 1 - v(M(a)),$$

$$\mu_{M \wedge N}(a,b) = \min(\mu_M(a), \mu_N(b))$$

$$\mu_{M \vee N}(a,b) = \max(\mu_M(a), \mu_N(b))$$

$$\mu_{M \rightarrow N}(a,b) = \min(1, 1 - \mu_M(a) + \mu_N(b))$$

D'aquesta forma, la teoria dels conjunts difusos introduïda per Zadeh l'any 1965, apareix de forma natural com un formalisme per a la representació de predicats vagues

en estreta relació originalment amb la lògica a infinits valors de Lukasiewicz, encara que posteriorment es va veure la possibilitat d'utilitzar a altres lògiques multivaluades com a lògiques subjacents.

En contrapartida, un conjunt d'enunciats que contiguin expressions vagues, modelitzades per conjunts difusos, no es pot estructurar en general com una àlgebra de Boole, atès que es perden propietats tals com que la unió d'un conjunt difús amb el seu complementari no és igual al total, o bé que la intersecció d'un conjunt amb el seu complementari no és el buit, etc. . Així, el marc a on es definien les mesures d'incertesa anteriorment aquí ja no és vàlid. És per això que s'han estudiat possibles extensions d'aquelles mesures pel cas de tractar incertesa en presència d'enunciats vagues, però encara no és un problema resolt. Vegi's per exemple (Trillas, 1988) pel cas de les probabilitats sobre reticles intuicionistes.

INFORMACIÓ IMPRECISA

FET A MESURAR	Distribucions de probabilitat	Distribucions de massa	Distribucions de possibilitat
Crisp	P(fet)	Bel(fet) Pl(fet)	Pos(fet) Nec(fet)
Vague	P*(fet)	Bel*(fet) Pl*(fet)	Pos*(fet) Nec*(fet)

fig. 2

En resum, el que queda clar és que l'elecció d'un model o d'un altra (veure fig.2) és una qüestió que depén fonamentalment del:

- 1) tipus d'enunciats sobre els que es vol fer raonaments, i
- 2) tipus d'informació de que es disposa per tal d'avaluar els diferents enunciats,

i que, al menys des del punt de vista general dels Sistemes basats en el Coneixement, el concepte de veritat es pot entendre en qualsevol cas com el resultat d'un procés de "matching" entre la representació del significat d'una proposició (conjunts clàssics o difusos) i la representació de lo efectivament conegut sobre la realitat (conjunts, distribucions de probabilitat, de possibilitat, etc.). Aquest punt de vista s'acosta al concepte de veritat que proposa la "teoria de la correspondència", defensada per Russell i Wittgenstein, on la veritat d'una proposició consisteix en la seva relació amb el món, en la seva correspondència amb els fets.

4. El Model Possibilístic.

A partir d'ara, quan es parli del model possibilístic de representació i raonament en general, s'entendrà aquell formalisme que el seu àmbit d'aplicació és els d'aquells sistemes on la informació ve representada per distribucions de possibilitat, i que utilitza el formalisme que dóna la teoria dels conjunts difusos per tal de representar la possible vaguetat dels enunciat.

La dificultat comentada adés d'adaptació de les mesures d'incertesa a la possible vaguetat dels enunciat té una excepció en el cas de les mesures de possibilitat, que ofereixen un marc unificat. En efecte, la teoria dels conjunts difusos apareix lligada d'una forma especial a les mesures de possibilitat abans esmentades, en el sentit que tot conjunt difús definit sobre un univers de discurs U determina una distribució de possibilitat sobre U , tal com a continuació s'exposa.

Considerem una proposició atòmica del tipus " X és A ", on X és una variable que pren valors sobre un univers U i A és un predicat vague, que ve representat per un subconjunt difús d' U , amb funció de pertinença μ_A . Aleshores, d'una banda, si coneixem que la variable X pren un valor determinat u , podem posar que el grau de veritat de la proposició " u és A ", tal com hem comentat, serà:

$$v("u \text{ és } A") = \mu_A(u)$$

, és a dir, en presència d'informació completa, $X=u$, la vaguetat dels enunciat ens porta a una *lògica multivaluada funcional* on els graus de veritat s'interpreten com el grau d'adequació de les proposicions als fets observats.

Ara bé, d'altra banda, asseverada la proposició " X és A ", si ens preguntem ara quin és el valor que pot prendre la variable X , la teoria de la possibilitat postula que la possibilitat (entesa aquí com a mesura d'incertesa) de que X prengui un valor qualsevol

u és igual al grau de pertinença d' u al subconjunt A , és a dir, la proposició " X és A " induïx una distribució de possibilitat sobre U :

$$\Pi(u) = \mu_A(u), \text{ per a tot } u \text{ de } U.$$

Aquesta distribució genera un parell de mesures duals de possibilitat i de necessitat sobre l'àlgebra de Boole del conjunt de les parts d' U , de la següent manera:

$$Pos_A, Nec_A : P(U) \rightarrow [0,1]$$

$$Pos_A(B) = \text{Sup}\{ \mu_A(u) / u \in B \}$$

$$Nec_A(B) = \text{Inf}\{ 1 - \mu_A(u) / u \notin B \}$$

Així doncs, Pos_A i Nec_A mesuren la incertesa d'enunciats ben definits (" X és B ") com a conseqüència de que la informació de referència (" X és A ") contingui expressions vagues. Observi's que la parella $(Pos_A(B), Nec_A(B))$ es pot interpretar com una distribució de possibilitat $\Pi_{A/B}$ sobre el conjunt $\{0,1\}$ de valors de veritat de la proposició " X és B " en presència de la informació " X és A ", on $\Pi_{A/B}(0) = Pos(B)$ i $\Pi_{A/B}(1) = Nec(B)$. En aquest punt, cal remarcar que han sigut Dubois i Prade qui han estudiat i desenvolupat l'anomenada *lògica possibilista* com una lògica de la incertesa basada en l'ús de les mesures de possibilitat, i dels qui s'ha prés algunes de les idees aquí exposades.

Queda un últim cas a enunciar dins del àmbit del model possibilístic que és el cas general en que tant l'enunciat a avaluar com la informació disponible siguin vagues. Aquest és el marc de la que anomenarem en aquesta memòria *lògica difusa* on, a diferència del cas anterior, el conjunt de valors de veritat és l'interval $[0,1]$. Tal com s'explicarà més detalladament en el capítol tercer d'aquesta memòria, en lògica difusa, el resultat del procés d'avaluació d'una proposició respecte a una informació donada és una distribució de possibilitat sobre el conjunt $[0,1]$ de valors de veritat, o bé dit d'altra forma, un subconjunt difús de $[0,1]$. Aquests subconjunts en la literatura (Baldwin, 1979) reben el nom de valors de veritat difusos ("fuzzy truth-values"), i permeten integrar el tractament de la vaguetat dels enunciats i de la incertesa deguda a la imprecisió i/o vaguetat de la informació. És interessant observar que, en el cas particular que la informació sigui imprecisa però no vaga, el resultat de la valoració no serà un subconjunt difús, sino un subconjunt clàssic de $[0,1]$, generalment un interval. Aleshores podríem dir que el marc és el d'una *lògica multivaluada amb intervals*, deguts a la imprecisió. Un resum del que s'acaba de comentar sobre els diferents àmbits del model possibilístic es pot veure en la següent figura.

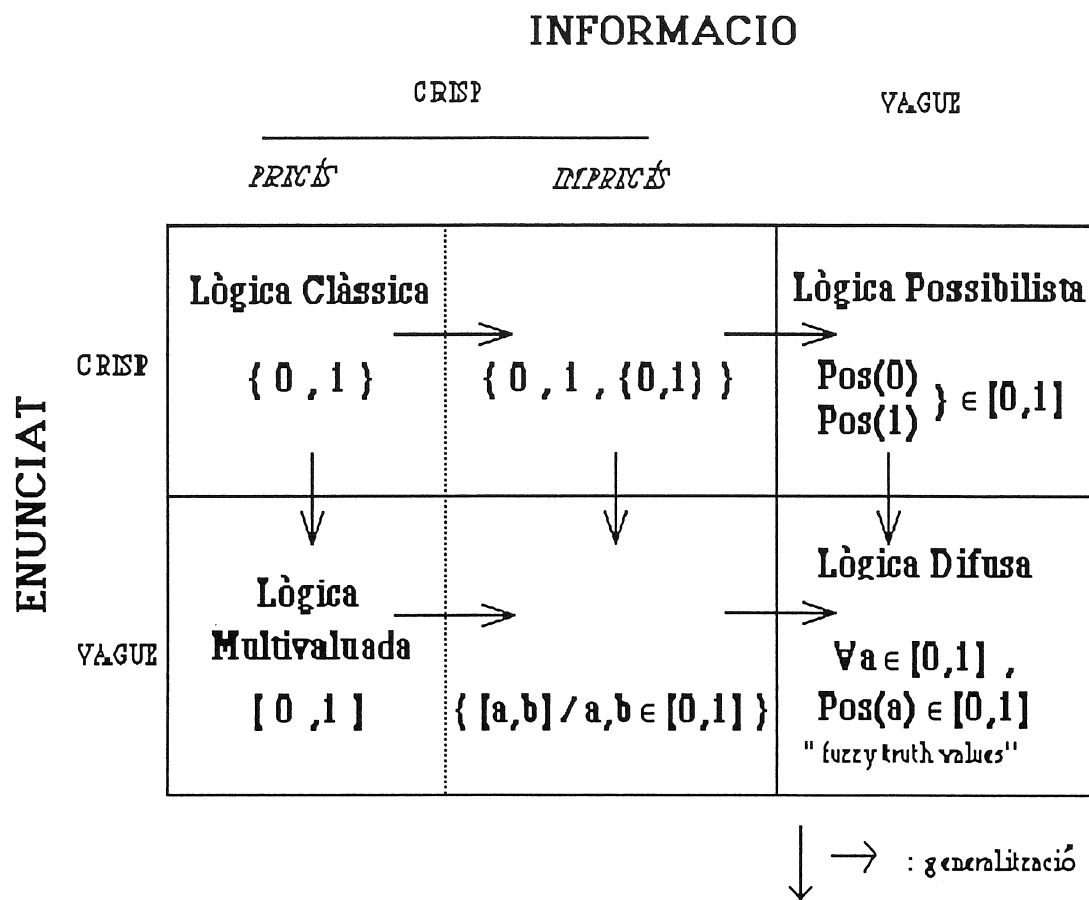


fig. 3

En el camp de la lògica difusa, cal destacar entre d'altres els treballs de Trillas i Valverde ((Trillas, Valverde; 1984, 1985, 1987), (Valverde, Trillas; 1985)) on, utilitzant l'estret lligam que hi ha entre la lògica difusa i la lògica infinitament valuada, s'han estudiat mecanismes d'inferència en els sistemes de lògica multivaluada per tal de que servissin de sustrat teòric a on fonamentar i construir models de inferència en el marc de la lògica difusa. Tantmateix és també de destacar els últims treballs de Ruspini sobre la caracterització semàntica de la lògica difusa en termes de la noció de similaritat, continuïtat o proximitat entre els estats possibles del sistema sobre el que es raona. Tal com s'explicita a (Ruspini, 1989), aquests treballs formen part d'una línia de recerca més àmplia, que intenta descriure semànticament varies metodologies de raonament aproximat utilitzant el marc formal dels "mons possibles" associat a les lògiques modals, i que va començar establint la ja comentada connexió entre el model evidencial de Dempster-Shafer i les lògiques epistèmiques

5. Objectiu i Contingut de la Memòria.

L'objectiu principal d'aquesta memòria és l'estudi de models d'inferència en el model possibilístic, i més concretament, la inferència en l'anomenada Lògica Difusa, a través d'un procés de generalització a partir de l'estudi de la inferència en els sistemes de Lògiques Multivaluades, seguint la línia encetada per Trillas i Valverde.

El principal mecanisme d'inferència que s'estudia és el Modus Ponens, atès que, segons Ruspini, en els Sistemes Experts hi ha una relació directa entre les capacitats de raonament del sistema i la implementació de mètodes per a l'aplicació controlada i automatitzada del Modus Ponens. En la majoria de sistemes experts amb gestió de la incertesa i/o vaguetat, la hipòtesi fonamental que hi ha implícita és la possibilitat d'associar en general un anomenat "factor de certesa" (la naturalesa del qual dependrà del model de raonament aproximat que utilitzi) a la conclusió d'una regla de forma funcional a partir dels factors de certesa associats a la premissa i al condicional. És a dir, si CF denota factor de certesa, es suposa que existeix una funció m tal que:

$$CF(q) = m(CF(p), CF(p \rightarrow q))$$

Les propietats de les funcions m hauran de dependre primer del model, i en segon lloc, ja dins d'un model determinat, del tipus de representació dels condicionals.

Els dos enfocos principals per a representar condicionals són:

- 1) el que prové de la teoria de la mesura (mesures condicionals), i
- 2) el que prové del formalisme de la lògica (implicació material)

Així per exemple, dins del model probabilístic el factor de certesa associat a un condicional "si A aleshores B" pot ser interpretat com una probabilitat condicionada $P(B/A)$, o bé com la probabilitat de la implicació material $P(\neg A \vee B)$. La mateixa qüestió es planteja en el cas de les mesures de possibilitat i de Dempster-Shafer (Dubois i Prade, 1989).

En qualsevol cas a (Alsina, Grané, Trillas, Sales; 1984), per tal de formular el Modus Ponens d'una forma funcional, independentment de quin sigui el model, s'introdueixen les anomenades "funcions generadores de Modus Ponens" com aquelles funcions m que compleixen com a mínim les propietats següents:

$$m: V \times V \rightarrow V$$

$$(MP1) \ m(CF(p), CF(p \rightarrow q)) \leq CF(q)$$

$$(MP2) \ m(1,1) = 1$$

$$(MP3) \ m(0,y) = y$$

$$(MP4) \ m \text{ creixent en les dues variables}$$

on V és el conjunt de valoració, essent 1 el seu element màxim i 0 el mínim. Així, d'acord amb aquestes propietats, una tal funció m ha de preservar el Modus Ponens clàssic i, en qualsevol cas, la funció m ha de donar una fita inferior pel factor de certesa de la conclusió, a partir dels factors de la premissa i del condicional.

Una de les idees bàsiques que s'ha perseguit en aquesta memòria és demostrar que aquesta formulació tan general d'aquesta regla d'inferència es també vàlida en el marc de la lògica difusa, i que això es fa a partir d'un estudi de la inferència en les lògiques funcionals multivaluades a $[0,1]$, com a lògiques subjacents a la teoria dels conjunts difusos. Més concretament, el contingut d'aquesta memòria es pot resumir de la forma següent.

En el primer capítol i dins del marc de les lògiques multivaluades a $[0,1]$, s'analitza la dualitat "implicació material / regla d'inferència de Modus Ponens", a partir de l'axiomàtica de les funcions d'implicació i de la formulació funcional del Modus Ponens a través de les anomenades "funcions generadores de modus ponens".

Seguidament, en la primera part del segon capítol es demostra que les lògiques multivaluades poden ser formalitzades com a famílies d'institucions quan es consideren els valors de veritat com a una part pròpia integrant dels enunciat de la lògica, on cada família ve determinada per una classe d'àlgebres de valors de veritat. Això permet tenir un sistema de deducció semàntica en el sentit clàssic, i a la vegada, com és usual, permet definir un sistema de conseqüències entre enunciat. La segona part del capítol està dedicat a l'estudi i formulació d'esquemes d'inferència a partir de l'anterior sistema de conseqüències, susceptibles de ser utilitzats en sistemes de deducció automatitzats, els quals tindran assegurada la correctesa respecte al sistema semàntic.

Ja en el marc dels sistemes possibilístics, en el tercer capítol i en primer lloc, es dona, a partir de resultats del primer capítol, una caracterització del principal mecanisme d'inferència en aquests sistemes, la anomenada Regla Composicional d'Inferència, també coneguda com Modus Ponens Generalitzat. A continuació s'analitza i es justifica com la introducció de les funcions de compatibilitat entre distribucions de possibilitat permet donar una formulació alternativa del mecanisme d'inferència a través de les Funcions d'Inferència Directa, i es demostra que, sota determinades condicions, aquestes tenen estructura d'operador conseqüència. Seguidament, es mostra que les

característiques especials de les funcions de compatibilitat fan que es puguin considerar com a valors de veritat a la lògica difusa, i sota aquesta perspectiva es donen les bases d'un càlcul lògic amb aquestes funcions.

Finalment, en l'últim capítol es planteja el problema de com obtenir un càlcul quan hi ha la restricció de treballar amb un nombre finit de valors, com podria ser el cas d'un motor d'inferències d'un sistema expert. Això porta a analitzar el problema de la generació i el·licitació d'operadors d'una lògica finitament valuada, és a dir, com generar àlgebres d'un conjunt finit de valors de veritat, i es proposa resoldre-ho com un problema de satisfacció de restriccions.

Capítol 1: IMPLICACIONS I FUNCIONS GENERADORES DE MODUS PONENS

1. Introducció.

Tal com s'ha esmentat al capítol introductor, per tal de donar una visió funcional, i alhora operativa de la regla d'inferència del Modus Ponens, s'introdueixen les anomenades "funcions de Modus Ponens" a (Alsina, Grané, Trillas, Sales; 1984) en un contexte general, i posteriorment a (Trillas, Valverde; 1985) en el contexte de les Lògiques Multivaluades, com aquelles funcions m que satisfan les propietats següents:

$$m: V \times V \rightarrow V$$

$$(MP1) \quad m(CF(p), CF(p \rightarrow q)) \leq CF(q)$$

$$(MP2) \quad m(1,1) = 1$$

$$(MP3) \quad m(0,y) = 0$$

$$(MP4) \quad m \text{ creixent en les dues variables}$$

on V és el conjunt de valoració, amb 1 com a element màxim i 0 com a mínim, i CF denota factor de certesa o valor de veritat. És a dir, m ha de preservar el Modus Ponens clàssic i, en qualsevol cas, la funció m ha de donar una fita inferior pel factor de certesa de la conclusió, a partir dels factors de la premissa i del condicional. En aquest capítol s'aprofondeix en l'estudi d'aquestes funcions en el marc de les lògiques funcionals multivaluades sobre l'interval unitat $[0,1]$, estudiant-ne la seva estructura i propietats que justifiquen la validesa de l'enfoc. Recordem les conegudes paraules de Reichenbach quan diu que una regla no es pot demostrar, només cal justificar-la (Reichenbach, 1949). En aquest sentit, es demostra que, si bé els connectius implicació determinen quines són les seves funcions de Modus Ponens associades, també queda determinada quina és la funció d'implicació adequada quan es pren com a primitiva la funció de Modus Ponens. Per últim, es fan unes breus ressenyes sobre la interrelació

d'aquestes funcions amb els connectius conjunció a l'hora de modelitzar inferències amb una premissa conjuntiva.

2. Funcions d'Implicació.

El connectiu implicació és, juntament amb la regla d'inferència del Modus Ponens, l'eina fonamental de l'anàlisi del raonament lògic. En Lògica Multivaluada, la majoria de connectius implicació emprats provenen de formalismes de les lògiques Booleana, Intuicionista, i també, en menor grau, de la Quàntica.

Des d'un punt de vista funcional, a (Valverde, 1982) es dona una axiomàtica dels connectius implicació per a una lògica multivaluada a $[0,1]$, a partir de les propietats que exigeix Rescher (Rescher, 1969) per a tals connectius, i que d'altra banda, són usuals a la majoria de sistemes lògics.

Definició 2.1.

Una funció d'implicació és una funció $I: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, tal que satisfà les següents propietats:

$$(I1) \quad \text{Si } x \leq x', \text{ aleshores } I(x,y) \geq I(x',y)$$

$$(I2) \quad \text{Si } y \leq y', \text{ aleshores } I(x,y) \leq I(x,y')$$

$$(I3) \quad I(0,0) = 1 \quad (\text{Principi de Falsedat})$$

$$(I4) \quad I(1,x) = x \quad (\text{Principi de Neutralitat})$$

$$(I5) \quad I(x, I(y,z)) = I(y, I(x,z)) \quad (\text{Principi d'Intercanvi})$$

De fet a (Valverde, 1982) es defineix una funció d'implicació com una funció que, a més de satisfer aquests axiomes, sigui contínua. La raó de no fer-ho aquí és el voler incloure en la definició donada un tipus molt important d'implicacions com són les anomenades R-implicacions, funcions que no són contínues en general. En cas d'exigir-se la continuïtat es té la següent caracterització (Valverde; 1982) (Alsina, Trillas; 1984).

Teorema 2.2.

Tota funció $I: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ contínua que verifiqui $I1, I2, I3, I4$, i $I5$ és de la forma :

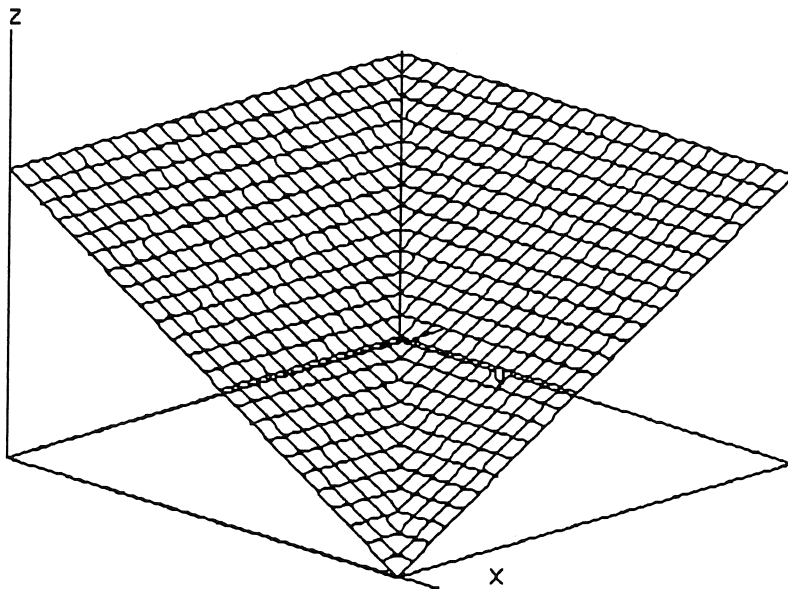
$$I(x,y) = S(f(x),y),$$

on S és una t -conorma contínua i $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ és una funció contínua i no-decreixent tal que $f(1) = 1 - f(0) = 0$.

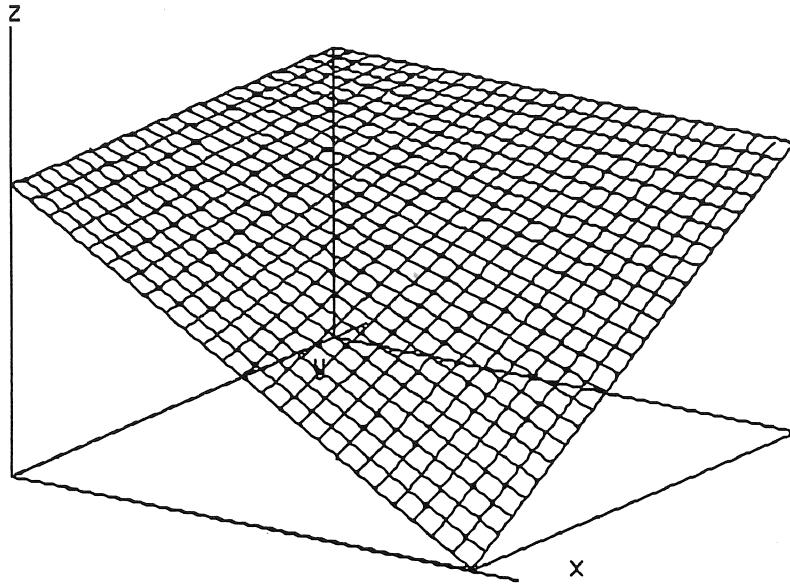
Entre les principals famílies de funcions implicació n'esmentarem dues: les implicacions fortes, o S-implicacions, i les implicacions per residuació, o R-implicacions.

S-Implicacions: les implicacions fortes són del tipus $I(x,y) = S(n(x),y)$, on S és una t -conorma contínua i n una negació forta. Com és fàcil observar, aquestes funcions provenen del formalisme booleà $p \rightarrow q = \neg p \vee q$, i tenint en compte el teorema anterior, venen caracteritzades per ser contínues i satisfer el principi de Contraposició ($I(x,y) = I(n(y),n(x))$) o bé, equivalentment, si és $I(I(x,0),0) = x$. per a tot $x \in [0,1]$ (Valverde, 1982). Com a exemples de tals implicacions tenim:

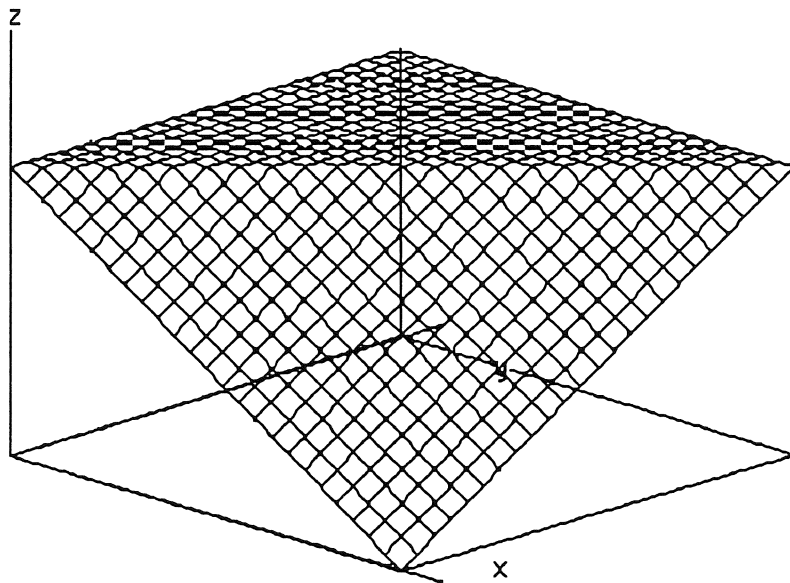
1) $I_{S1}(x,y) = \text{Max}(1-x, y)$:



2) $I_{S^2}(x,y) = 1-x+xy$



3) $I_{S^3}(x,y) = \text{Min}(1, 1-x+y)$:

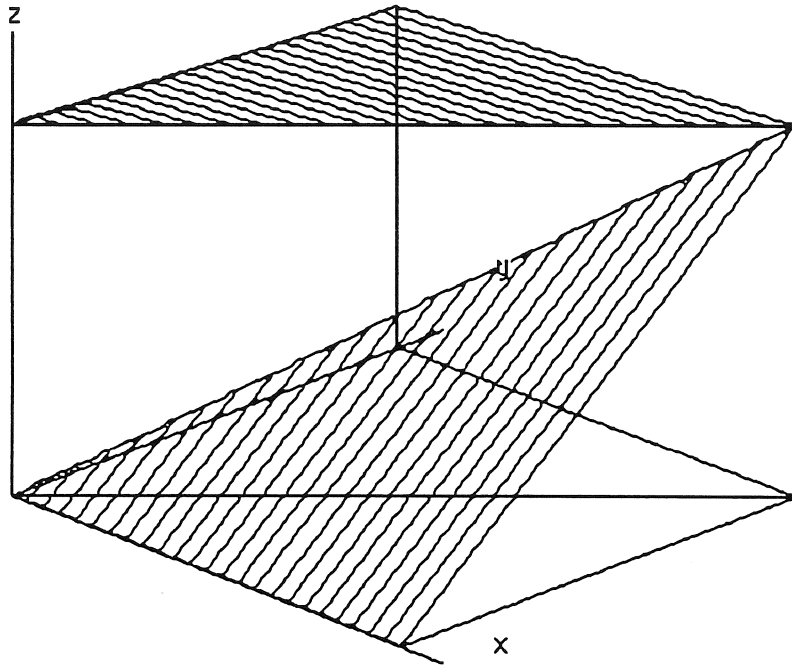


Aquestes S-implicacions estan generades a partir de $n(x)=1-x$ i de les t-conormes $S^1(x,y) = \text{Màx}(x,y)$, $S^2(x,y)=x+y-xy$, i $S^3(x,y) = \text{Min}(1, x+y)$ respectivament.

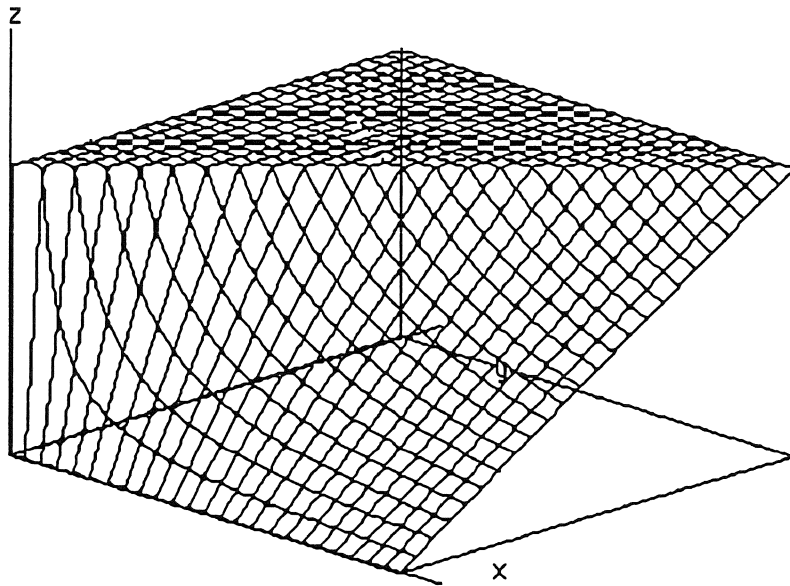
R-Implicacions: aquestes són implicacions definides per residuació respecte a un connectiu conjunció, de forma anàloga a com es fa a la Lògica Intuicionista. Així, les R-implicacions són funcions definides com $I(x,y) = \text{Sup}\{ c \in [0,1] / T(x,c) \leq y \}$, on

T és una t-norma, i a part dels axiomes (I1) ÷ (I5) satisfan el Principi d'Identitat, $I(x,x) = 1$, per a tot $x \in [0,1]$, i en general la relació $I(x,y)=1$ si i només si $x \leq y$. Tal com ja s'ha esmentat, aquestes implicacions no són en general contínues, excepte en els cas que T sigui una t-norma arquimediana estricta. Fora d'aquest cas, només es pot assegurar la continuïtat de la segona variable per la dreta. Exemples de R-implicacions són:

$$1) I_{R1}(x,y) = y, \text{ si } x > y; \quad I_{R1}(x,y) = 1, \text{ si } x \leq y$$



$$2) I_{R2}(x,y) = x/y, \text{ si } x > y; \quad I_{R2}(x,y) = 1, \text{ si } x \leq y$$



$$3) I_{R3}(x,y) = 1-x+y, \text{ si } x > y; \quad I_{R3}(x,y) = 1, \text{ si } x \leq y$$

Per últim, cal fer notar que les úniques implicacions que pertanyen a les dues famílies són les anomenades Implicacions de Lukasiewicz, és a dir les implicacions per a les quals existeix una funció contínua i estrictament creixent g de $[0,1]$ en $\mathbb{R}^+$ amb $g(0) = 0$ tal que $I(x,y) = g^{[-1]}(g(1)-g(x)+g(y))$. La implicació $I_S^3 = I_R^3$ és efectivament d'aquesta forma, amb $g(x) = x$, per a tot $x \in [0,1]$.

3. Funcions generadores de Modus Ponens per a una implicació

En aquest apartat, i dins del marc de la lògica multivaluada, s'estudia la formulació funcional del Modus Ponens a través de les anomenades funcions generadores de Modus Ponens. Aquestes funcions, a més de satisfer altres propietats interessants, bàsicament el que fan és, donats els valors de veritat de les proposicions "a" i "a→b", proporcionar una fita inferior del valor de veritat de "b", ja que, en general, aquest valor no està unívocament determinat pels valors de "a" i de "a→b".

Seguint Trillas i Valverde (Trillas, Valverde; 1984) donem la següent definició:

Definició 3.1.

*Sigui I una funció d'implicació aleshores, una funció $m: [0,1] \rightarrow [0,1]$ es diu que és una **funció generadora de Modus Ponens per a I** (f.g.m.p. per a I), si es compleixen les següents propietats:*

$$MP1) m(x, I(x,y)) \leq y$$

$$MP2) m(1,1)=1$$

$$MP3) m(0,1)=0$$

$$MP4) m \text{ creixent en ambdues variables.}$$

Així, a part de la propietat MP1 abans esmentada, la MP2 garanteix el Modus Ponens clàssic, la MP3 estableix que si l'antecedent és fals res s'en pot inferir, i finalment la MP4 assegura un comportament regular de la funció en el cas d'encadenament d'inferències, i.e. $m(m(v(a),v(a \rightarrow b)),v(b \rightarrow c)) \leq v(c)$.

Donada una funció d'implicació I , les f.g.m.p. per a I no vénen determinades unívocament per les propietats MP1÷MP4, com molt fàcilment es pot observar. En efecte, si m és una f.g.m.p. per a I , i m' és tal que compleix MP2, MP3 i MP4, i és

$m' \leq m$, aleshores m' també és una f.g.m.p. per a I . Per tant, en general, cada I tindrà tota una família de f.g.m.p.. Ara bé, de totes elles, indubtablement la més interessant serà la que proporcioni les fites inferiors més grans. La resta de l'apartat es dedica a caracteritzar aquestes funcions.

Definició 3.2.

Donada una funció d'implicació I , es defineix el conjunt $FGMP_I$ de f.g.m.p.

$$FGMP_I = \{ m: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1] \mid m \text{ és f.g.m.p. per a } I \}$$

NOTA: la funció m^* definida per

$$m^*(x,y) = 1, \text{ si } x=y=1$$

$$m^*(x,y) = 0, \text{ altrament}$$

pertany a $FGMP_I$, per a qualsevol implicació I .

Definició 3.3.

Donada una funció d'implicació I , definim la funció m_I associada a I com

$$m_I(x,y) = \inf \{ c \mid I(x,c) \geq y \}.$$

NOTA : Atès que tota funció d'implicació verifica $I(x,1) = 1$ per a tot x , l'ínfim dels valors c tals que $I(x,c) \geq y$ sempre existeix.

Lema 3.4.

Sigui I una funció d'implicació. Aleshores es verifiquen les següents condicions:

1. Si $I(x,y) \geq k$, aleshores $m_I(x,k) \leq y$
2. Sigui I contínua per la dreta respecte la segona variable, i $m_I(x,k) \leq y$, aleshores $I(x,y) \geq k$

Demostració:

1. És immediat que si $I(x,y) \geq k$, aleshores $y \geq \inf \{ c \mid I(x,c) \geq k \} = m_I(x,k)$.
2. Suposem que $m_I(x,k) \leq y$, i per tant serà $I(x,y) \geq I(x, m_I(x,k))$. La definició de m_I ens diu que $m_I(x,k) = \inf \{ c \mid I(x,c) \geq k \} \leq y$. Si I és contínua per la dreta respecte la segona variable, valdrà $I(x, m_I(x,k)) \geq k$, i finalment tindrem $I(x,y) \geq I(x, m_I(x,k)) \geq k$.

◆

Cal observar que per a les S-implicacions i per a les R-implicacions val l'equivalència

$$I(x,y) \geq k \text{ si, i només si, aleshores } m_I(x,k) \leq y$$

donat que ambdues classes d'implicacions compleixen la condició de continuïtat per la dreta respecte a la segona variable, en particular les S-implicacions son funcions contínues.

Proposició 3.5.

Sigui I una implicació. Aleshores m_I és una funció generadora de Modus Ponens per a I, i a més, compleix les següents propietats:

MP-I-1) $m_I(1,y) = y$, per a qualsevol y de $[0,1]$,

MP-I-2) si I és contínua per la dreta respecte la segona variable, aleshores es compleix $m_I(x, m_I(y,z)) = m_I(y, m_I(x,z))$.

Demostració:

Anem a veure primer que m_I és una funció de Modus Ponens per a I. En efecte:

MP1: $m_I(x, I(x,y)) = \inf\{c / I(x,c) \geq I(x,y)\} \leq y$.

MP2: Atès que les implicacions satisfan $I(1,x) = x$, tenim $m_I(1,y) = \inf\{c / I(1,c) \geq y\} = \inf\{c / c \geq y\} = y$, i per tant, en particular, serà $m_I(1,1) = 1$.

MP3: De forma semblant, atès que les implicacions satisfan $I(0,x) = 1$, també tindrem $m_I(0,y) = \inf\{c / I(0,c) \geq y\} = \inf\{c / 1 \geq y\} = 0$

MP4: Suposem $x \leq x'$. El fet que I és decreixent en la primera variable, permet escriure $m_I(x,y) = \inf\{c / I(x,c) \geq y\} \leq \inf\{c / I(x',c) \geq y\} = m_I(x',y)$. Suposem ara que $y \leq y'$. Donat que I és creixent en la segona variable, tenim $m_I(x,y) = \inf\{c / I(x,c) \geq y\} \leq \inf\{c / I(x,c) \geq y'\} = m_I(x,y')$

MP-I-1: veure MP2.

MP-I-2: Per definició de m_I tenim $m_I(x, m_I(y,z)) = \inf\{c / I(x,c) \geq m_I(y,z)\}$. Pel lema previ, és $\inf\{c / I(x,c) \geq m_I(y,z)\} = \inf\{c / I(y, I(x,c)) \geq z\}$, i pel principi d'intercanvi, és $\inf\{c / I(y, I(x,c)) \geq z\} = \inf\{c / I(x, I(y,c)) \geq z\} = m_I(y, m_I(x,z))$.

◆

Teorema 3.6.

Per a qualsevol I , $FGMP_I$, amb les operacions

$$m \vee m' = \max(m, m') \quad , \quad m \wedge m' = \min(m, m') ,$$

és un reticle complet amb les funcions m^* i m_I com a elements mínim i màxim respectivament.

Demostració:

1. És immediat comprovar que $m \vee m'$ i $m \wedge m'$ són f.g.m.p. per a I .
2. Sigui $\{ m_j / j \in J \}$ una família arbitrària de $FGMP_I$. Anem a comprovar que $\bigvee_{j \in J} m_j$ és una funció generadora de Modus Ponens per a I .

$$MP1: (\bigvee_{j \in J} m_j)(x, I(x, y)) = \text{Sup}\{ m_j(x, I(x, y)) / j \in J \} \leq y$$

$$MP2: (\bigvee_{j \in J} m_j)(1, 1) = \text{Sup}\{ m_j(1, 1) / j \in J \} = 1$$

$$MP3: (\bigvee_{j \in J} m_j)(0, z) = \text{Sup}\{ m_j(0, z) / j \in J \} = 0$$

MP4: Si $x \leq x'$, aleshores:

$$(\bigvee_{j \in J} m_j)(x, y) = \text{Sup}\{ m_j(x, y) / j \in J \} \leq \text{Sup}\{ m_j(x', y) / j \in J \} = \bigvee_{j \in J} m_j(x', y)$$

Si $y \leq y'$, aleshores:

$$(\bigvee_{j \in J} m_j)(x, y) = \text{Sup}\{ m_j(x, y) / j \in J \} \leq \text{Sup}\{ m_j(x, y') / j \in J \} = \bigvee_{j \in J} m_j(x, y')$$

La comprovació per a $\bigwedge_{j \in J} m_j$ és anàloga:

3. És immediat veure que $m \geq m^*$ per a qualsevol m de $FGMP_I$.
4. Les propietats de les funcions d'implicació permeten assegurar que, per a qualsevol x, y , sempre existeix c tal que $I(x, c) \geq y$. Aleshores, per a tot c tal que $I(x, c) \geq y$, serà $m(x, y) \leq m(x, I(x, c)) \leq c$, i per tant també serà $m(x, y) \leq \text{Inf}\{ c / I(x, c) \geq y \} = m_I(x, y)$. ♦

NOTES:

- Si I és contínua per la dreta respecte a la segona variable, aleshores $I(x, m_I(x, y)) \geq y$.
- Si donats x i y , existeix c tal que $y = I(x, c)$, aleshores tenim que $I(x, m_I(x, y)) = I(x, \text{Inf}\{ c / I(x, c) \geq y \}) = \text{Inf}\{ I(x, c) / I(x, c) \geq y \} = y$

Així doncs, cal remarcar que dins del marc d'una lògica multivaluada amb una funció I com a connectiu implicació, les anteriors propietats donen la característica fonamental

següent de la funció m_I : de les funcions candidates a poder expressar funcionalment el Modus Ponens (o sigui, que compleixin MP1, MP2, MP3 i MP4), la m_I és la que dona una fita inferior més gran per al grau de certesa d'un enunciat "b" consistent amb el grau del enunciat "a" i del enunciat "a $\rightarrow$ b".

Seguidament es descriuen com són aquestes funcions pels dos tipus d'implicacions més freqüentment utilitzades, les definides per residuació (R-implicacions) i les anomenades fortes (S-implicacions)

Exemples de funcions m_I :

1) Si I és una R-implicació generada per una t-norma T , és a dir $I(x,y) = T^{\wedge}(x | y)$ on T és la quasi-inversa de T (vegi's l'apartat 2 del apèndix 1), aleshores $m_I = T$. En efecte, atès que per a les R-implicacions la condició $I(x,y) \geq c$ és equivalent a $T(x,c) \geq y$, tenim que $m_I(x,y) = \inf\{ c / I(x,c) \geq y \} = \inf\{ c / T(x,y) \geq c \} = T(x,y)$

2) En el cas de les S-implicacions, si $I(x,y) = S(n(x),y)$ on S és una t-conorma i n una funció de negació forta, aleshores només cal substituir l'expressió d' I a la definició de m_I per a comprovar que és $m_I(x,y) = S^{\wedge}(n(x) | y)$, essent $S^{\wedge}$ la quasi-inversa de S (vegi's l'apartat 2 del apèndix 1).

4. Implicacions per a una funció generadora de Modus Ponens

De fet, la importància del connectiu implicació està en el paper que juga en el Modus Ponens, i la diferència bàsica entre una i l'altre és que es mouen a dos nivells diferents. Mentre les implicacions són objectes del llenguatge, les regles d'inferència en general, i en particular el Modus Ponens, són del metallenguatge. El lligam que s'estableix entre implicacions i funcions generadores de Modus Ponens a través de la propietat MP1 deixa oberta la possibilitat de permetre precisament fer el pas d'un nivell a l'altre. El com fer el pas de baix a dalt ha estat la guia de l'apartat anterior on, un cop definit el connectiu implicació, l'objectiu era buscar una formulació escaient d'un procediment que permetés obtenir enunciats vàlids a partir d'enunciats vàlids, i que, finalment, quan ens restringuéssim al cas bivaluat retrobés el Modus Ponens clàssic. Manca doncs estudiar el pas invers, al qual aquest apartat hi està dedicat.

Suposem doncs que ara ens ve donat primer el procediment pel qual es modelitza el Modus Ponens. A partir d'aquí, anem a veure com podem construir connectius implicació que representin condicionals susceptibles de ser utilitzats en la regla d'inferència.

Consideracions molt semblants a les exposades a (Valverde, 82) per a les implicacions, i a (Alsina et al., 84) per a les funcions de Modus Ponens, ens porten a la següent definició.

Definició 4.1.

Una funció $m: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ serà una funció primitiva generadora de Modus Ponens si verifica les següents propietats:

- 1) $m(1,y) = y$
- 2) $m(0,1) = 0$
- 3) m creixent respecte a les dues variables
- 4) $m(x, m(y,z)) = m(y, m(x,z))$

És interessant observar que les úniques propietats que diferencien aquestes funcions de les d'implicació són la condició de contorn $m(0,1) = 0$ ($I(0,1) = 1$), i la creixença de les m en la primera variable (les I són decreixents en la primera variable). D'altra part, cal remarcar que una funció primitiva generadora de Modus Ponens que sigui contínua i que verifiqui a més la condició $m(y,1) = y$, necessàriament ha de ser una t-norma.

A l'apartat anterior, es definien les f.g.m.p. per a una implicació donada, com aquelles funcions que complissin unes propietats (MP1 ÷ MP4) que són mínimament exigibles a l'hora de modelitzar la inferència a partir de condicionals representats per la implicació considerada. Anàlogament, es defineixen seguidament les funcions que anomenarem "quasi-implicacions" associades a una funció primitiva generadora de Modus Ponens m , i que són les funcions que compleixen les mínimes propietats per tal de modelitzar condicionals que intervinguin en inferències modelitzades per m .

Definició 4.2.

Donada una funció primitiva generadora de Modus Ponens m , es diu que una funció $I: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ és una quasi-implicació associada a m si compleix les següents condicions:

- (MP1) $m(x, I(x,y)) \leq y$.
- (I1) Si $x \leq x'$, aleshores $I(x,y) \geq I(x',y)$
- (I2) Si $y \leq y'$, aleshores $I(x,y) \leq I(x,y')$
- (I3) $I(0,0) = 1$ (Principi de Falsedat)

$$(I4) \quad I(1,x) = x \quad (\text{Principi de Neutralitat})$$

NOTA: Com es pot observar, es podria haver definit primerament, i de forma independent de qualsevol f.g.m.p., una quasi-implicació com una implicació a la que no se li demana el compliment del Principi d'Intercanvi.

Una mateixa funció m pot tenir diferents quasi-impliacions associades. En efecte, si I és una quasi-implicació associada a m , i I' és una altra quasi-implicació tal que $I' \leq I$, aleshores és immediat comprovar que I' també ho és (sempre que m sigui creixent respecte a la segona variable). Anem a veure seguidament que, donada una funció generadora de Modus Ponens m , se li pot definir una funció d'implicació associada que, a més, sigui la més gran de totes les quasi-impliacions associades a m .

Definició 4.3.

Donada una funció primitiva generadora de Modus Ponens m , es defineix el conjunt

$$FI_m = \{ I \text{ quasi-implicació} / m(x, I(x,y)) \leq y \},$$

de totes les quasi-impliacions associades a m .

Observi's que la implicació I^* definida per

$$\begin{aligned} I^*(x,y) &= 1, \text{ si } x = 0 \\ I^*(x,y) &= y, \text{ altrament} \end{aligned}$$

pertany a FI_m per a qualsevol m , atès que si $x \neq 0$, aleshores és $m(x, I^*(x,y)) = m(x,y) \leq m(1,y) = y$, i si $x = 0$, aleshores és $m(0, I(0,y)) = m(0,1) = 0 \leq y$.

Definició 4.4.

Donada una funció primitiva generadora de Modus Ponens m , es defineix la funció I_m com

$$I_m(x,y) = \text{Sup} \{ c \in [0,1] / m(x,c) \leq y \}.$$

Atès que $m(1,0) = 0$, observi's que es verifica $\{ c \in [0,1] / m(x,c) \leq y \} \neq \emptyset$ per a qualsevols $x, y \in [0,1]$, i per tant I_m està ben definida.

Lema 4.5.

1. Si $m(x,y) \leq z$, aleshores $I_m(x,z) \geq y$.
2. En el cas de que m sigui contínua per l'esquerra respecte a la segona variable, si $I_m(x,z) \geq y$, aleshores $m(x,y) \leq z$.

Demostració:

1. Si $m(x,y) \leq z$, llavors és $y \leq \text{Sup}\{ c / m(x,c) \leq z \} = I_m(x,z)$.
2. Si m és contínua per l'esquerra respecte a la segona variable, aleshores atès que $I_m(x,z) = \text{Sup}\{ c / m(x,c) \leq z \} \geq y$, es complirà també $m(x, I_m(x,z)) \leq z$, i per la monotonía de m , tindrem $m(x,y) \leq m(x, I_m(x,z)) \leq z$. ♦

Proposició 4.6.

Sigui m una funció primitiva generadora de Modus Ponens. Aleshores I_m és una quasi-implicació associada a m . A més, si m és contínua per l'esquerra respecte a la segona variable, I_m és una implicació.

Demostració::

Anem a veure primer que I_m és una quasi-implicació, és a dir, compleix les condicions MP1, I1 ÷ I4 :

$$(MP1). m(x, I_m(x,y)) = m(x, \text{Sup}\{ c / m(x,c) \leq y \}) = \text{Sup}\{ m(x,c) / m(x,c) \leq y \} \leq y.$$

(I1). I_m és decreixent respecte a la primera variable. En efecte, sigui $x \leq x'$. Aleshores com que $m(x',c) \leq y$ implica $m(x,c) \leq y$, tenim que $\text{Sup}\{ c / m(x',c) \leq y \} \leq \text{Sup}\{ c / m(x,c) \leq y \}$, i per tant és $I_m(x',y) \leq I_m(x,y)$.

(I2). I_m és creixent respecte a la segona variable. En efecte, sigui $y \leq y'$. Aleshores com que $m(x,c) \leq y$ implica $m(x,c) \leq y'$, tenim que $\text{Sup}\{ c / m(x,c) \leq y \} \leq \text{Sup}\{ c / m(x,c) \leq y' \}$, i per tant és $I_m(x,y) \leq I_m(x,y')$

$$(I3). I_m(0,y) = \text{Sup}\{ c / m(0,c) = 0 \leq y \} = 1$$

$$(I4). I_m(1,y) = \text{Sup}\{ c / m(1,c) = c \leq y \} = y$$

Finalment, pel lema 4.5 anterior, si m és contínua per l'esquerra respecte a la segona variable, aleshores es verifica que $m(x,c) \leq I_m(y,z)$ si, i només si, $m(y, m(x,c)) \leq z$. Aleshores és $I_m(x, I_m(y,z)) = \text{Sup}\{ c / m(x,c) \leq I_m(y,z) \} = \text{Sup}\{ c / m(y, m(x,c)) \leq z \} = \text{Sup}\{ c / m(x, m(y,c)) \leq z \} = I_m(y, I_m(x,z))$, és a dir I_m és una implicació. ♦

El següent teorema dóna l'estructura del conjunt de totes les quasi-implicacions associades a una funció primitiva generadora de Modus Ponens m donada. Aquí es posa de manifest el paper important de la funció I_m .

Teorema 4.7.

Per a qualsevol funció generadora de Modus Ponens m contínua per l'esquerra respecte a la segona variable, el conjunt FI_m de quasi-impliacions associades a m , amb les operacions

$$I \vee I' = \max(I, I') \quad , \quad I \wedge I' = \min(I, I')$$

és un reticle complet amb I^ com a element mínim i I_m com a element màxim.*

Demostració:

1. És immediat comprovar que si $I, I' \in FI_m$, aleshores $I \vee I'$ i $I \wedge I'$ són també quasi-impliacions associades a m .

2. Sigui $\{ I_j / j \in J \}$ una família arbitrària de FI_m . Anem a comprovar que $\bigvee_{j \in J} I_j$ és una quasi-implicació associada a I . En efecte, tenim:

$$MP1: m(x, (\bigvee_{j \in J} I_j)(x, y)) = \bigvee_{j \in J} m(x, I_j(x, y)) \leq \bigvee_{j \in J} y = y$$

I1: Si $x \leq x'$, aleshores és

$$(\bigvee_{j \in J} I_j)(x, y) = \sup_j \{ I_j(x, y) / j \in J \} \geq \sup_j \{ I_j(x', y) / j \in J \} = (\bigvee_{j \in J} I_j)(x', y)$$

I2: Si $y \leq y'$, aleshores és

$$(\bigvee_{j \in J} I_j)(x, y) = \sup_j \{ I_j(x, y) / j \in J \} \leq \sup_j \{ I_j(x, y') / j \in J \} = (\bigvee_{j \in J} I_j)(x, y')$$

$$I3: (\bigvee_{j \in J} I_j)(0, 1) = \sup_j \{ I_j(0, 1) / j \in J \} = \sup_j \{ 1 \} = 1$$

$$I4: (\bigvee_{j \in J} I_j)(1, y) = \sup_j \{ I_j(1, y) / j \in J \} = \sup_j \{ y \} = y$$

La demostració és anàloga per a $\bigwedge_{j \in J} I_j$.

3. Si $x \neq 0$, es verifica $I(x, y) \geq y = I^*(x, y)$, i si $x = 0$, aleshores $1 = I(0, y) = I^*(0, y)$, amb el que queda vist que $I \geq I^*$ per a qualsevol I , i en particular per a qualsevol I de FI_m .

4. Per últim, si $m(x, I(x, y)) \leq y$, aleshores per el lema anterior tenim que $I_m(x, y) \geq I(x, y)$, és a dir és la més gran de FI_m . ♦

Finalment, les dues proposicions següents demostren la convergència d'aquest enfoc amb el de l'apartat anterior.

Proposició 4.8.

Si m és contínua per l'esquerra respecte a la segona variable, aleshores és compleix:

$$m_{I_m} = m$$

Demostració::

En efecte, pel lema 4.5 tenim $m_{I_m}(x,y) = \inf\{ c / I_m(x,c) \geq y \} =$
 $= \inf\{ c / m(x,y) \leq c \} = m(x,y)$. ♦

Proposició 4.9.

Si I és contínua per la dreta respecte a la segona variable, aleshores és compleix:

$$I_{m_I} = I$$

Demostració::

En efecte, pel lema 3.4 del apartat anterior tenim $I_{m_I}(x,y) = \sup\{ c / m_I(x,c) \leq y \} =$
 $= \sup\{ c / I(x,y) \geq c \} = I(x,y)$. ♦

5. Relació entre el connectiu conjunció, el connectiu implicació i la funció generadora de Modus Ponens associada.

Considerem el condicional "si p i q , aleshores r ", que pot ser representat per " $p \wedge q \rightarrow r$ ". En lògica clàssica, és ben sabut que aquest condicional és equivalent al condicional "si p , aleshores, si q , aleshores r ", o sigui " $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ ". En lògica multivaluada, aquesta equivalència vindria donada per la següent condició:

$$I(T(x,y), z) = I(x, I(y,z)) \quad (*)$$

on T és el connectiu conjunció i I és el connectiu implicació. Observi's que, degut a la commutativitat de T , la satisfacció de (*) porta com a condició necessària el compliment del principi d'intercanvi per part de la I , és a dir $I(x, I(y,z)) = I(y, I(x,z))$. Anem a veure que la relació (*) la satisfan tant les S -implicacions com les R -implicacions.

Proposició 5.1.

1. Sigui la S -implicació $I(x,y) = S(n(x),y)$. Si T és la t -norma dual de S per n , aleshores es satisfà la relació $I(T(x,y),z) = I(x,I(y,z))$, per a tot $x,y,z \in [0,1]$.

2. Si I és la R -implicació generada per T , aleshores es satisfà la relació $I(T(x,y),z) = I(x,I(y,z))$, per a tot $x,y,z \in [0,1]$.

Demostració::

1. $I(T(x,y),z) = S(n(T(x,y)),z) = S(S(n(x),ny),z) = S(n(x),S(ny,z)) = I(x,I(y,z))$
2. $I(T(x,y),z) = \text{Sup}\{ c / T(T(x,y),c) \leq z \} = \text{Sup}\{ c / T(y,T(x,c)) \leq z \} = \text{Sup}\{ c / T(x,c) \leq I(y,z) \} = I(x,I(y,z)). \blacklozenge$

Entrem ara a considerar la inferència amb aquests condicionals conjuntius. Per raons anàlogues, s'hauria de complir la condició

$$m_I(T(x,y),z) = m_I(y,m_I(x,z)) = m_I(x,m_I(y,z)), \quad (**)$$

que prové de deduir " r " per Modus Ponens a partir de " $p \wedge q$ " i de " $p \wedge q \rightarrow r$ ", o bé per l'aplicació successiva dues vegades del Modus Ponens a partir de " p ", " q " i de " $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ ".

La següent proposició prova que la relació (**) la tornen a complir tant les S -implicacions com les R -implicacions. En efecte,

Proposició 5.2.

1. Sigui la S -implicació $I(x,y) = S(n(x),y)$. Si T és la t -norma dual de S per n , aleshores es satisfà la relació $m_I(T(x,y),z) = m_I(x,m_I(y,z))$, per a tot $x,y,z \in [0,1]$.

2. Si I és la R -implicació generada per T , aleshores es satisfà la relació $m_I(T(x,y),z) = m_I(x,m_I(y,z))$, per a tot $x,y,z \in [0,1]$.

Demostració::

1. Sigui $I(x,y) = S(n(x),y)$, i per tant $m_I(x,y) = S^{(n(x)|y)}$. Aleshores tenim

$$\begin{aligned} S^{(n(T(x,y)) | z)} &= S^{(S(n(x),ny) | z)} = \text{Inf}\{ c / S(S(n(x),ny),c) \geq z \} = \\ &= \text{Inf}\{ c / S(n(x),S(ny,c)) \geq z \} = \text{Inf}\{ c / I(x,I(y,c)) \geq z \} = \\ &= \text{Inf}\{ c / I(y,c) \geq m_I(x,z) \} = m_I(y,m_I(x,z)) \end{aligned}$$
2. El cas de les R -implicacions és immediat, ja que si $I(x,y) = T^{(x | y)} = \text{Inf}\{ c / T(x,c) \leq y \}$, aleshores és $m_I = T$, i la relació $m_I(T(x,y),z) = m_I(x,m_I(y,z))$ es satisfà per l'associativitat de T . $\blacklozenge$

Capítol 2: LES LÒGIQUES MULTIVALUADES EN EL MARC DE LES INSTITUCIONS.

1. Introducció.

La majoria de les axiomatitzacions de la lògica poden classificar-se des de dos tipus d'enfocs:

- l'enfoc basat en la teoria de models, que pren com a primitiva la relació de satisfacció entre models i enunciat i
- l'enfoc basat en la teoria de la demostració, que pren com a primitiva la relació de deducció entre conjunts d'enunciats.

La noció d'institució fou introduïda per Goguen i Burstall (Goguen, Burstall; 1983) per a generalitzar la noció de sistema lògic, dit amb paraules d'aquests autors "una institució és una generalització precisa de la noció informal d'un sistema lògic". Aquesta generalització cau dins de l'enfoc basat en la teoria de models i, a més, el fet de que s'utilitzi la teoria de categories li dona una gran generalitat, evitant així la particularització de nocions com 'llenguatge' i 'estructura', tal com posa de manifest J. Meseguer a (Meseguer, 1989) amb les següents paraules: "les propietats matemàtiques crucials de les institucions no resideixen en les estructures i menys en les representacions particulars d'aquestes sinó en les funcions (morfismes de categories) que preserven aquestes estructures". En la següent definició informal d'institució es posa de manifest l'anterior.

Una *institució* consta de :

- una col·lecció de signatures, que donen el vocabulari per a construir els enunciat, i de morfismes de signatures, que donen la forma de passar d'un vocabulari a un altre,
- un conjunt d'enunciats associat a cada signatura,

- un conjunt de models associats a cada signatura, que proporcionen interpretacions pels enunciats, i
- una relació de satisfacció entre models i enunciats, de forma que sigui invariant pels canvis de signatura.

Exemples d'institucions ho són la majoria dels sistemes lògics clàssics (Lògica de primer ordre, Lògica equacional, Lògica de les Clausules de Horn,...).

En el proper apartat d'aquest capítol, donada una classe d'àlgebres de valors de veritat, la classe de les lògiques valorades sobre aquestes àlgebres són estructurades com una família d'institucions indexada per la pròpia classe d'àlgebres. Per tant, primer de tot, es fa una introducció de les mínimes propietats exigibles a aquestes àlgebres de valors de veritat per a continuació donar la família d'institucions anteriorment esmentada. Seguidament s'estudia l'existència de morfismes d'institució entre les institucions d'aquesta família i es dona una condició suficient per a que aquests morfismes existeixin. L'existència d'un morfisme entre dues institucions diu que es pot canviar d'institució mantenint els resultats obtinguts en l'altra institució, és a dir, són la base per a construir sistemes lògics multivaluats de forma modular. Finalment, en el tercer i últim apartat d'aquest capítol, des del marc del sistema de conseqüències ('entailment system') associat a una institució, s'estudien dos esquemes de inferència, el Modus Ponens i la Resolució, per a les lògiques multivaluades.

A continuació es donen les definicions formals dels conceptes introduïts anteriorment juntament amb altres definicions i resultats que s'utilitzaran al llarg d'aquest capítol. Comencem amb la definició formal del important concepte de signatura i del de morfisme de signatures

Definició 1.1.

Una signatura S és una família de conjunts indexada pel conjunt $\{\text{sort}, \text{opr}, \text{rel}\}$ on:

- S_{sort} és un conjunt Σ (noms de tipus),
- S_{opr} és una família de conjunts indexada pel conjunt $\Sigma^* \times \Sigma$ (noms d'operacions) que notarem per $(S_{w,s})_{w \in \Sigma^*, s \in \Sigma}$, i
- S_{rel} una família de conjunts indexada per Σ^* (noms de relació) que notarem per $(S_w)_{w \in \Sigma^*}$,

on Σ^* és el conjunt format per les potències finites de Σ , és a dir $\Sigma^* = \{\Sigma x^n \mid x \in \Sigma, n \in \mathbb{N}\}$, i $f \in S_{(s_1, \dots, s_n), s}$ significarà que $f : s_1 x \dots x s_n \rightarrow s$.

Definició 1.2

Un morfisme de signatures $\sigma : S \rightarrow S'$ és una família de funcions indexada pel conjunt $\{\text{sort}, \text{opr}, \text{rel}\}$ on :

- $\sigma_{\text{sort}} : \Sigma \rightarrow \Sigma'$,
- $\sigma_{\text{opr}} : (S_{w,s})_{w \in \Sigma^*, s \in \Sigma} \rightarrow (S'_{w,s})_{w \in \Sigma^*, s \in \Sigma}$ respecta els tipus d'operacions,
- $\sigma_{\text{rel}} : (S_w)_{w \in \Sigma^*} \rightarrow (S'_w)_{w \in \Sigma^*}$ respecta els tipus de relacions,

és a dir, si $f \in S_{(s_1, \dots, s_n), s}$ aleshores $\sigma_{\text{opr}}(f) \in S'_{(\sigma_{\text{sort}}(s_1), \dots, \sigma_{\text{sort}}(s_n)), \sigma_{\text{sort}}(s)}$
i si $r \in S_{s_1, \dots, s_n}$ aleshores $\sigma_{\text{opr}}(r) \in S'_{\sigma_{\text{sort}}(s_1), \dots, \sigma_{\text{sort}}(s_n)}$.

Ara estem en condicions de donar a continuació les definicions d'institució i de morfisme d'institucions sobre les que girarà bona part d'aquest capítol.

Definició 1.3.(Goguen, Burstall; 1983)

Una institució és una quàdrupla $I = \langle \text{SIGN}, \text{SEN}, \text{MOD}, \models \rangle$ on :

- SIGN és la categoria que té per objectes signatures, i per morfismes morfismes de signatures,
- $\text{SEN} : \text{SIGN} \rightarrow \text{SET}$ és un functor que associa a cada signatura un conjunt d'enunciats,
- $\text{MOD} : \text{SIGN} \rightarrow \text{CAT}^{\text{OP}}$ és un functor que associa a cada signatura la corresponent categoria de models,
- $\models$ és una funció que associa a cada signatura S una relació binària $\models_S \subset \text{MOD}(S) \times \text{SEN}(S)$, anomenada relació de satisfacció, de forma que, per a tot $\$: S \rightarrow S'$ morfisme de signatures, es verifiqui la condició d'invariança:

$$\text{MOD}(\$)(M') \models_S s \text{ si i només si } M' \models_{S'} \$(s),$$

* CAT^{OP} representa la categoria dual de la categoria CAT que té per objectes categories i per morfismes functors.

per a tot model $M' \in MOD(S')$ i per a tot enunciat $s \in SEN(S)$.

Definició 1.4.

Siguin $I = \langle SIGN, SEN, MOD, |= \rangle$ i $I' = \langle SIGN', SEN', MOD', |=' \rangle$ dues institucions. Un **morfisme d'institucions** $M: I \rightarrow I'$ és una tripleta (Φ, α, β) , consistent en:

1. un functor $\Phi: SIGN \rightarrow SIGN'$,
2. una transformació natural $\alpha: SEN' \circ \Phi \rightarrow SEN$, donada per una família natural de funcions $\alpha_S: SEN'(\Phi(S)) \rightarrow SEN(S)$, i
3. una transformació natural $\beta: MOD \rightarrow MOD' \circ \Phi$, donada per una família natural de funcions $\beta_S: MOD(S) \rightarrow MOD'(\Phi(S))$,

tal que es preservi la relació de satisfacció, és a dir, es compleix la següent condició

$$A |=_S \alpha_S(s') \text{ si i només } \beta_S(A) |='_{\Phi(S)} s'$$

per a qualsevol S -model A de I , i qualsevol $\Phi(S)$ -enunciat s' de I' .

La teoria anomenada de les Lògiques Generals (General Logics) iniciada per J. Meseguer en (Meseguer, 1989), connecta els dos enfoc de la lògica exposats anteriorment mitjançant la seva noció de "lògica". Més concretament, donada una institució, i per tant una relació de satisfacció, i un 'entailment system', el qual conté una relació de deducció, es dirà que defineixen una lògica si aquestes dues relacions compleixen l'axioma de la correctesa.

Definició 1.5.

Un "**entailment system**" és una tripleta $E = \langle Sign, Sen, |- \rangle$, on $Sign$ és una categoria de signatures, Sen és un functor $Sen: Sign \rightarrow Set$, i $|-$ és una funció que associa a cada signatura S de $Sign$ una relació binària $|-_S \subseteq P(Sen(S)) \times Sen(S)$, anomenada S -entailment, tal que es satisfan les següents propietats:

1. Reflexivitat: per a tot $\sigma \in Sen(S)$, $\{\sigma\} |-_S \sigma$
2. Monotonicitat: si $\Omega |-_S \sigma$, i $\Omega \subseteq \Omega'$, aleshores $\Omega' |-_S \sigma$
3. Transitivitat: si $\Omega |-_S \sigma_j \forall j \in J$, i $\Omega \cup \{\sigma_j / j \in J\} |-_S \alpha$, aleshores $\Omega |-_S \alpha$

4. */-* Traducció: si $\Omega /-_S \sigma$ aleshores, per a qualsevol morfisme de signatures $\$: S \rightarrow S'$, es té $\$(\Omega) /-_{S'} \(σ)

Definició 1.6.

Una lògica és una 5-tupla $L = \langle \text{Sign}, \text{Sen}, \text{Mod}, /-, /= \rangle$ de forma que:

1. $\langle \text{Sign}, \text{Sen}, /- \rangle$ és un "entailment system"
2. $\langle \text{Sign}, \text{Sen}, \text{Mod}, /= \rangle$ és una institució, i
3. Es satisfà la següent condició de correctesa per a tot $S \in \text{Sign}$, $\Omega \subseteq \text{Sen}(S)$ i $\sigma \in \text{Sen}(S)$,

$$\Omega /-_S \sigma \Rightarrow \Omega /=_S \sigma$$

Una lògica es diu que es completa si $\Omega /-_S \sigma \Leftrightarrow \Omega /=_S \sigma$

Definició 1.7.

Donat un conjunt de S -enunciats Ω , es pot definir la categoria $MOD(S, \Omega)$ com la subcategoria de $MOD(S)$ dels models M que satisfan tots els enunciats de Ω , és a dir, $M /=_S \sigma$, per a tot $\sigma \in \Omega$. Aleshores, podem definir una relació, que també notarem per $/=$, entre conjunts de LS-enunciats i LS-enunciats de la forma usual:

$$\Omega /=_S \sigma \text{ si i només si } M /=_S \sigma \text{ per a tot } M \in MOD(S, \Omega) \quad (1)$$

Proposició 1.8 (Meseguer, 1989).

Sigui $I = \langle \text{Sign}, \text{Sen}, \text{Mod}, /= \rangle$ una institució. Aleshores la tripleta $I^+ = \langle \text{Sign}, \text{Sen}, /- \rangle$, on $/-$ denota la relació definida per (1) és un "entailment system".

Proposició 1.9 (Meseguer, 1989).

Una institució I determina una lògica completa tal que I^+ és el seu "entailment system" subjacent, i I és a la seva institució subjacent.

2. Formalització de les Lògiques Multivaluades com a famílies d'Institucions.

Les lògiques multivaluades (Rescher, 1969; Rasiowa, 1974) es construeixen a partir d'un conjunt de símbols de predicat, un conjunt de símbols de connectius, i d'un conjunt de valors de veritat. Amb els dos primers es construeix l'àlgebra lliure, o

àlgebra de termes, generada pels símbols de predicats i que té com operacions els símbols de connectius. Els elements d'aquesta àlgebra lliure s'anomenen enunciats. Finalment, a cada enunciat se li associa un element del conjunt de valors de veritat, aquest element representant el grau de certesa de l'enunciat. Per tant, sembla convenient que aquest conjunt de valors de veritat tingui algun tipus d'estructura, almenys que sigui una àlgebra del mateix tipus que l'àlgebra dels enunciats, i a més amb dos elements distingits o operacions d'aritat 0: 'cert' i 'fals'. A la pràctica, atès que es vol que el conjunt de valors de veritat sigui "senzill", a les possibles àlgebres de valors de veritat se'ls hi exigeixen més axiomes. Finalment, els morfismes entre l'àlgebra lliure dels enunciats i la corresponent àlgebra de valors de veritat són anomenats valoracions. En lògica proposicional cada valoració és interpretada com un model, i per tant un model estarà generat per una aplicació del conjunt de símbols de predicats en el conjunt de valors de veritat.

La manera més uniforme d'estructurar les lògiques multivaluades com institucions seria considerar l'àlgebra dels valors de veritat com part del llenguatge, és a dir, posar-la en la signatura, i per tant de manera natural aquests valors de veritat formarien part dels enunciats i dels models, però l'inconvenient que això comporta és que la classe de models és molt gran i hom no pot distingir quan es fa un canvi de signatura si els models canvien degut al canvi dels símbols de predicat o al canvi dels valors de veritat. A la pràctica interessa diferenciar els dos casos, i per consegüent prendrem les àlgebres de valors de veritat fora de la signatura i construirem una família d'institucions indexada per aquestes àlgebres. Així, els morfismes de signatura representaran canvis de llenguatge mentre que els morfismes d'institució representaran canvis de valors de veritat.

2.1. Àlgebres de valors de veritat.

Una àlgebra de valors de veritat serà un objecte d'una categoria $\text{MOD}(\text{TV}, \text{EQ})$ dels models d'una presentació (TV, EQ) , és a dir, de la parella formada per una signatura TV amb un sol tipus (el tipus valor de veritat) i per un conjunt d'axiomes EQ que han de satisfer les operacions de TV . Com és natural, les operacions de la signatura TV han d'estar en relació directa amb els connectius de les lògiques que pretenen valorar sobre la classe d'àlgebres que determini la presentació (TV, EQ) , en el sentit que en aquestes àlgebres hi ha d'haver tantes operacions i del mateix tipus com connectius hi hagi en les lògiques. D'altra banda, els axiomes de la presentació representen el mínim conjunt de propietats exigibles a les operacions de les àlgebres de $\text{MOD}(\text{TV}, \text{EQ})$, propietats que a la vegada tenen una traducció immediata a quines seran les propietats característiques de

la família de lògiques multivaluades que valorin sobre àlgebres de la categoria $\text{MOD}(\text{TV}, \text{EQ})$.

Així doncs, cada presentació del tipus (TV, EQ) especifica una classe d'àlgebres, on no importa tant quins puguin ser els particulars valors de veritat en cada cas, sinó quines són les propietats intrínseques que defineixen la classe. Per tant, canviar d'axiomes a la presentació significa canviar de propietats estructurals a un nivell més alt que el que pot significar un canvi per un morfisme d'àlgebres dins d'una categoria d'àlgebres donada, és a dir, mantenint fixe el conjunt d'axiomes.

A continuació és dona un exemple de presentació per a una classe d'àlgebres de valors de veritat que cobreix la majoria de sistemes polivalents surgits a partir de les lògiques de Lukasiewicz, i en particular totes aquelles subjacents a la teoria dels conjunts difusos.

Exemple:

Sigui TV la següent signatura:

Tipus: V (un conjunt de valors de veritat)

Operacions:

Cert : $\rightarrow V$

Fals : $\rightarrow V$

Neg : $V \rightarrow V$

And : $V \times V \rightarrow V$

Or : $V \times V \rightarrow V$

Impli : $V \times V \rightarrow V$

Equiv : $V \times V \rightarrow V$

Ordre : $V \times V \rightarrow \{\text{Cert}, \text{Fals}\}$

Sigui **EQ** el següent conjunt d'axiomes

Neg

$$\text{Neg}(\text{Cert}) = \text{Fals}$$

$$\text{Neg}(\text{Neg}(x)) = x$$

$$\text{Impli}(\text{Ordre}(x,y), \text{Ordre}(\text{Neg}(y), \text{Neg}(x))) = \text{Cert}$$

And

Commutativa

Associativa

$$\text{And}(\text{Cert}, x) = x$$

$$\text{And}(\text{Fals}, x) = \text{Fals}$$

$$\text{Impli}(\text{Ordre}(x,y), \text{Ordre}(\text{And}(x,z), \text{And}(y,z))) = \text{Cert}$$

Or

$$\text{Or}(x,y) = \text{Neg}(\text{And}(\text{Neg}(x), \text{Neg}(y)))$$

Impli

$$\text{Impli}(\text{Cert}, x) = x$$

$$\text{Impli}(x, \text{Impli}(y,z)) = \text{Impli}(y, \text{Impli}(x,z))$$

$$\text{Impli}(\text{And}(x,y), x) = \text{Cert}$$

$$\text{Impli}(\text{Ordre}(x,y), \text{Ordre}(\text{Impli}(z,x), \text{Impli}(z,y))) = \text{Cert}$$

$$\text{Impli}(\text{Ordre}(x,y), \text{Ordre}(\text{Impli}(y,z), \text{Impli}(x,z))) = \text{Cert}$$

Equiv

$$\text{Equiv}(x,y) = \text{And}(\text{Implic}(x,y), \text{Implic}(y,x))$$

Ordre

$$\text{Ordre}(\text{Fals}, x) = \text{Cert}$$

$$\text{Ordre}(x, \text{Cert}) = \text{Cert}$$

$$\text{Ordre}(x, x) = \text{Cert}$$

$$\text{Ordre}(x, y) = \text{Neg}(\text{Ordre}(y, x)), \text{ per a tot } x \neq y$$

$$\text{Implic}(\text{And}(\text{Ordre}(x, y), \text{Ordre}(y, z)), \text{Ordre}(x, z)) = \text{Cert}$$

Observi's que el model usual dels booleans (Bool) és un objecte inicial de MOD(TV, EQ).

Altres exemples d'àlgebres de MOD(TV, EQ) poden ser:

- 1) $V = [0,1]$, amb l'ordre usual, True = 1, Fals = 0, Neg = n, And = T, Or = S, Implic = I, i Equiv = E,

on n és una negació forta, T és una t-norma, S la t-conorma dual de T per n, I és una funció d'implicació, i E és un connectiu equivalència definit per $E(x,y) = T(I(x,y), I(y,x))$

- 2) $V = \{ E_0, E_1, E_2, E_3, E_4 \}$, amb l'ordenació $E_0 \leq E_1 \leq E_2 \leq E_3 \leq E_4$, i amb les següents matrius com a operacions, on s'han identificat els valors amb els seus subíndexos:

Neg		And	0	1	2	3	4	Or	0	1	2	3	4
0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	3	4
1	3	1	0	1	1	1	1	1	1	2	3	3	4
2	2	2	0	1	1	1	2	2	1	3	3	3	4
3	1	3	0	1	1	2	3	3	3	3	3	3	4
4	0	4	0	1	2	3	4	4	4	4	4	4	4

Impli	0	1	2	3	4	Equiv	0	1	2	3	4
0	4	4	4	4	4	0	4	0	0	0	0
1	0	4	4	4	4	1	0	4	3	2	1
2	0	3	4	4	4	2	0	3	4	3	2
3	0	2	3	4	4	3	0	2	3	4	3
4	0	1	2	3	4	4	0	1	2	3	4

2.2. LS-Institucions.

A partir d'aquí LS denotarà un objecte de la categoria $\text{MOD}(\text{TV}, \text{EQ})$, i $|\text{LS}|$ el seu conjunt suport. Per a cada LS es descriurà la institució de la lògica LS-multivaluada, LS-LMV. Aquesta institució estarà definida com és usual per una 4-tupla $\langle \text{SIGN}, \text{LS-SEN}, \text{LS-MOD}, |= \rangle$. Cadascuna de les seves components es descriuen a continuació.

D'entrada suposarem que els següents objectes són donats:

- Nat, el conjunt de nombres naturals
- un conjunt de símbols de relació, juntament amb la seva aritat,
- un conjunt de símbols de variables
- un conjunt d'individus
- un conjunt de relacions definides sobre els individus
- un conjunt C de símbols de connectius lògics, juntament amb la seva aritat,
- i una funció *denota_connectiu* de C al conjunt d'operacions de la signatura TV.

SIGN:

La categoria de signatures SIGN té com a objectes signatures S on:

- S_{sort} és un conjunt Σ de tipus,
- S_{rel} formada per una família de conjunts RS indexada per Σ^* que seran els símbols de relació.

Els morfismes de SIGN són morfismes de signatura.

A partir d'ara notarem per Ar a la funció de RS a Nat que dona l'aritat dels símbols de relació.

LS-SEN:

La definició dels enunciats de la mateixa manera que es defineixen en la lògica clàssica fa que a l'hora de definir la relació de satisfacció aquesta esdevé una relació fuzzy i per tant no es té una institució en el sentit definit anteriorment. Per evitar aquest inconvenient s'han definit els LS-enunciats mitjançant el funtor LS-SEN com es detalla a continuació:

El funtor LS-SEN de SIGN a la categoria SET que dona els LS-enunciats es defineix a partir del funtor SEN de SIGN a SET que proporciona els enunciats clàssics i definit de la forma següent:

1. Donada una signatura $S \in \text{SIGN}$, $\text{SEN}(S)$, el conjunt de S-enunciats, consisteix en:

- S-enunciats atòmics: enunciats del tipus $(r, \{x_1, \dots, x_n\})$, on r és un símbol de relació de S , $\{x_1, \dots, x_n\}$ és un conjunt de símbols de variables, amb $Ar(r) = n$.
- S-enunciats connectats: enunciats del tipus $\text{connect}(c, L)$, on c és un connectiu lògic, L és una llista d'enunciats de longitud igual a l'aritat de c .

2. Donat un morfisme de signatures $\$: S \rightarrow S'$, $\text{SEN}(\$)$ tradueix S-enunciats en S'-enunciats de la següent forma:

- si $s = (r, X)$, aleshores $\text{SEN}(\$)(s) = (\$(s), X)$
- si $s = \text{connect}(c, [s_1, \dots, s_n])$, aleshores:
 $\text{SEN}(\$)(s) = \text{connect}(c, [\text{SEN}(\$)(s_1), \dots, \text{SEN}(\$)(s_n)])$

Ara, un cop definit el functor SEN, podem passar a definir el functor LS-SEN:

1. Donada una signatura $S \in \text{SIGN}$, $\text{LS-SEN}(S)$ és el conjunt de LS-S-enunciats, formats per parelles (s, W) , on s és un S-enunciat, i $W \subset |LS|$.
2. Donat un morfisme de signatures $\$: S \rightarrow S'$, $\text{LS-SEN}(\$)$ és el parell de functors $(\text{SEN}(\$), \text{Id.})$, és a dir, $\text{LS-SEN}(\$)(s, W) = (\text{SEN}(\$)(s), W)$.

LS-MOD:

El functor LS-MOD de SIGN a CAT^{OP} dona, per a cada signatura S , la categoria $\text{LS-MOD}(S)$ de S-LS-models, i un functor $\text{LS-MOD}(\$): \text{LS-MOD}(S') \rightarrow \text{LS-MOD}(S)$, per a cada morfisme de signatures $\$: S \rightarrow S'$. Anem a descriure la categoria $\text{LS-MOD}(S)$ i el functor $\text{LS-MOD}(\$)$.

LS-MOD(S)

* Els objectes de la categoria $\text{LS_MOD}(S)$ són S-LS-models definits com a triplets $\langle S, \text{Ind}, f \rangle$, on S és una signatura de SIGN, Ind és un conjunt d'individus, i f és una funció que associa una relació $f(r)$ a cada símbol de relació r de S . Així doncs, $f(r)$ és una funció de Ind^n en $|LS|$, on $n = \text{Ar}(r)$, i per tant, en realitat, $f(r)$ és una relació valuada sobre LS.

* Un morfisme en la categoria $\text{LS-MOD}(S)$ entre dos S-LS-models $\langle S, \text{Ind}, f \rangle$ i $\langle S, \text{Ind}', f' \rangle$ és una funció $\partial: \text{Ind} \rightarrow \text{Ind}'$ tal que el següent diagrama commuta per a cada r de S , on $n = \text{Ar}(r)$:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f(r): \text{Ind}^n & \xrightarrow{\quad} & |LS| \\
 & \nearrow f & \downarrow \partial^n & & \downarrow \text{Id} \\
 r & & & & \\
 & \searrow f' & f'(r): \text{Ind}'^n & \xrightarrow{\quad} & |LS|
 \end{array}$$

LS-MOD(\$)

* El functor LS-MOD(\$)\$ tradueix S'-LS-models en S-LS-models de la següent forma:

$$\text{LS-MOD}(\$)(\langle S', \text{Ind}', f \rangle) = \langle S, \text{Ind}', f_{\circ \$} \rangle$$

* D'altra banda, LS-MOD(\$)\$ tradueix morfismes entre S'-LS-models en morfismes entre els corresponents S-LS-models traduïts, de forma que el diagrama següent commuta:

$$\begin{array}{ccc} A' = \langle S', \text{Ind}_a, f_a \rangle & \xrightarrow{\text{LS-MOD}(\$)} & \langle S, \text{Ind}_a, \$; f_a \rangle \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ B' = \langle S', \text{Ind}_b, f_b \rangle & \xrightarrow{\text{LS-MOD}(\$)} & \langle S, \text{Ind}_b, \$; f_b \rangle \end{array}$$

LA RELACIÓ DE SATISFACTIBILITAT $\models$:

La definició de la Relació de Satisfactibilitat requereix abans la definició del que anomenem **grau de satisfacció** d'un S-enunciat en un S-LS-model. En efecte, donat un model $A = \langle S, \text{Ind}, f \rangle$ i una funció d'assignació $v: \text{VAR} \rightarrow \text{Ind}$, on VAR és un conjunt de variables, el grau de satisfacció d'un S-enunciat en el model A, sota l'assignació v, ve donat per la funció $d_v: \text{LS-MOD}(S) \times \text{SEN}(S) \rightarrow |\text{LS}|$, definida per:

$$- d_v(A, (r, X)) = f(r)(v(X))$$

$$- d_v(A, \text{connect}(c, [s_1, \dots, s_n])) = (\text{denota-connectiu}(c))(d_v(A, s_1), \dots, d_v(A, s_n)).$$

Ara, es defineix la Relació de Satisfactibilitat entre S-LS-models i S-LS-enunciats de la següent forma:

$$A \models_v (s, W) \text{ si i només si } d_v(A, s) \in W$$

$$A \models (s, W) \text{ si i només si } A \models_v (s, W) \text{ per a tota funció d'assignació } v$$

El següent teorema prova que LS-LMV és en efecte una Institució.

Teorema 2.2.1

Donat un morfisme de signatures $\$: S \rightarrow S'$, el functor $LS-MOD(\$)$ preserva la relació de satisfactibilitat $\models$, és a dir, si A' és un S' -LS-model, aleshores

$$A' \models LS-SEN(\$)(s, W) \text{ si i només si } LS-MOD(\$)(A') \models (s, W)$$

per a qualsevol S -LS-enunciat (s, W) .

Demostració:

Sigui $A' = \langle S', \text{Ind}', f \rangle$, i per tant $LS-MOD(\$)(A') = \langle S, \text{Ind}', \text{fo}\$ \rangle$. Anem a veure primer que $d_v(LS-MOD(\$)(A'), s) = d_v(A', SEN(\$)(s))$, per a tota funció d'assignació v . En efecte:

- si $s = (r, X)$, aleshores tenim $d_v(LS-MOD(\$)(A'), s) = ((\text{fo}\$)(r))(v(X)) = f(\$)(r)(v(X)) = d_v(A', SEN(\$)(s))$
- si $s = \text{connect}(c, [s_1, \dots, s_n])$ i suposem que es verifiquen les igualtats $d_v(LS-MOD(\$)(A'), s_i) = d_v(A', SEN(\$)(s_i))$ per a $i = 1, \dots, n$, aleshores tenim

$$\begin{aligned} d_v(LS-MOD(\$)(A'), s) &= (\text{denota-connectiu}(c))(d_v(LS-MOD(\$)(A'), s_1), \dots, d_v(LS-MOD(\$)(A'), s_n)) = \\ &= (\text{denota-connectiu}(c))(d_v(A', SEN(\$)(s_1)), \dots, d_v(A', SEN(\$)(s_n))) = \\ &= d_v(A', \text{connect}(c, [SEN(\$)(s_1), \dots, SEN(\$)(s_n)])) = d_v(A', SEN(\$)(s)) \end{aligned}$$

A partir d'aquí, la resta de la demostració és immediata:

$A' \models LS-SEN(\$)(s, W)$ si i només si $d_v(LS-MOD(\$)(A'), s) \in W$ per a tota assignació v , si i només si $d_v(A', SEN(\$)(s)) \in W$, si i només si $LS-MOD(\$)(A') \models (s, W)$. ♦

2.3. Morfismes entre LS-Institucions.

Principalment el que es fa en aquesta secció és veure que, donades dues institucions $LS-LMV = \langle \text{SIGN}, LS-SEN, LS-MOD, \models \rangle$ i $LS'-LMV = \langle \text{SIGN}, LS'-SEN, LS'-MOD, \models \rangle$, una condició suficient per a l'existència de morfismes d'institució entre $LS-LMV$ i $LS'-LMV$ és l'existència de morfismes d'àlgebra entre LS i LS' . L'existència d'un tal morfisme assegurarà la preservació de la relació de satisfactibilitat quan els models i els enunciats es tradueixen d'una institució a l'altra de la forma que ho indica el següent teorema.

Teorema 2.3.1.

Siguin les dues institucions $LS-LMV = \langle SIGN, LS-SEN, LS-MOD, |= \rangle$ i $LS'-LMV = \langle SIGN, LS'-SEN, LS'-MOD, |= \rangle$. Aleshores, cada morfisme d'àlgebres $@: LS \rightarrow LS'$ permet definir un morfisme d'institucions $M_@: LS-LMV \rightarrow LS'-LMV$.

Demostració:

Tal com s'ha vist, tot morfisme d'institucions consta de 1) un functor entre signatures, 2) una transformació natural entre enunciats, i 3) una transformació natural entre models que preservi la relació de satisfactibilitat. Anem a veure com, donat un morfisme d'àlgebres $@: LS \rightarrow LS'$, podem construir un morfisme entre $LS-LMV$ i $LS'-LMV$. En efecte:

1) Atès que la categoria de signatures $SIGN$ és la mateixa a $LS-LMV$ i $LS'-LMV$, prenem com a functor entre signatures el functor identitat $ID: SIGN \rightarrow SIGN$.

2) Definim una transformació natural $t_@$ del functor $LS'-SEN$ al functor $LS-SEN$ tot donant el conjunt de funcions

$$t_@ = \{ t_{@S} : LS'-SEN(S) \rightarrow LS-SEN(S) / \forall S \in SIGN \},$$

on $t_{@S}((s, W)) = (s, @^{-1}(W))$. Aquesta definició fa que el següent diagrama commuti per a tot morfisme de signatures $#: S \rightarrow S'$:

$$\begin{array}{ccccc}
 S & LS'-SEN(S) & \xrightarrow{t_{@S}} & LS-SEN(S) \\
 \downarrow \# & \downarrow LS'-SEN(\#) & & \downarrow LS-SEN(\#) \\
 S' & LS'-SEN(S') & \xrightarrow{t_{@S'}} & LS-SEN(S')
 \end{array}$$

3) La transformació natural $m_@$ del functor $LS'-MOD$ al functor $LS-MOD$ és donada pel conjunt de functors $m_@ = \{ m_{@S}: LS-MOD(S) \rightarrow LS'-MOD(S) / \forall S \in SIGN \}$, on $m_{@S}(\langle S, Ind, f \rangle) = \langle S, Ind, @ \circ f \rangle$, i s'aplica als morfismes en la forma natural.

Amb aquesta definició, el diagrama següent commuta per a tot morfisme de signatures $\$: S \rightarrow S'$:

$$\begin{array}{ccccc}
 S & LS\text{-MOD}(S) & \xrightarrow{m_{\text{-}\textcircled{S}}} & LS'\text{-MOD}(S) & \\
 \downarrow \textcircled{\$} & \downarrow LS\text{-MOD}(\textcircled{\$}) & & \downarrow LS'\text{-MOD}(\textcircled{\$}) & \\
 S & LS\text{-MOD}(S') & \xrightarrow{m_{\text{-}\textcircled{S'}}} & LS'\text{-MOD}(S') &
 \end{array}$$

Finalment, anem a comprovar que la relació de satisfactibilitat es preservada per les transformacions naturals, és a dir que $m_{\text{-}\textcircled{S}}(A) \models (s, W)$ si i només si $A \models t_{\text{-}\textcircled{S}}(s, W)$, per a tot model $A \in LS\text{-MOD}(S)$ i per a tot enunciat $(s, W) \in LS'\text{-SEN}(S)$. En efecte, si $A = \langle S, \text{Ind}, f \rangle$, per les definicions donades de $m_{\text{-}\textcircled{S}}$ i de $t_{\text{-}\textcircled{S}}$ tenim que $m_{\text{-}\textcircled{S}}(A) \models (s, W)$ si i només si $d'_v(\langle S, \text{Ind}, \textcircled{\text{of}} \rangle, s) \in W$ per a tota assignació v . Ara bé, tenint en compte que $\textcircled{\$}$ és un morfisme d'àlgebres, es pot demostrar per inducció sobre el nombre de literals de s que es compleix

$$d'_v(\langle S, \text{Ind}, \textcircled{\text{of}} \rangle, s) = \textcircled{\$} \circ d_v(\langle S, \text{Ind}, f \rangle, s)$$

Aleshores, $d'_v(\langle S, \text{Ind}, \textcircled{\text{of}} \rangle, s) \in W$ és equivalent a $d_v(\langle S, \text{Ind}, f \rangle, s) \in \textcircled{\$}^{-1}(W)$, i per tant equivalent a que $A \models t_{\text{-}\textcircled{S}}(s, W)$, tal com es volia demostrar. ♦

3. LS-Institucions i Esquemes d'Inferència.

En lògica clàssica, la bivalència fa que no hi hagi ambigüetat a l'hora d'establir sistemes sintàctics de deducció. Quan s'escriu " $p, q \vdash p \& q$ " implícitament s'està dient que si " p " i " q " són certs, aleshores també ho és " $p \& q$ ". Així, la teoria de la redundància de Ramsey (Ramsey, 1927), on s'afirma que dir és cert que " p " és equivalent a dir que " p ", no té sentit en les lògiques multivaluades segons l'enfoc que proposem

Gaire bé en tots els tractats sobre lògiques multivaluades, les regles d'inferència (Modus Ponens) s'apliquen només sobre proposicions a les que se'ls hi ha assignat el valor booleà "cert", o bé, en general, un dels valors anomenats "designats". En qualsevol cas, aquests valors actuen com a llindar que separa les proposicions "certes" de les que no ho són considerades com tals.

Aquesta idea de llindar es trenca aquí a l'incorporar els valors de veritat en els enunciats, i permetre així raonar amb qualsevol conjunt d'enunciats. Aquesta idea està present en la majoria de motors d'inferència de Sistemes Experts que utilitzen algun model de factors de certesa.

El concepte d'axioma també varia. Així, per exemple, en la lògica L_∞ de Lukasiewicz $p \vee \neg p$ no és un axioma, ja que $v(p \vee \neg p) = \max(v(p), 1-v(p))$ no és sempre igual a 1. Amb el nostre enfoc $[p \vee \neg p, \{1\}]$ tampoc seria un axioma, però sí que ho seria $[p \vee \neg p, [.5, 1]]$.

Anem a veure en aquest apartat quan i com es poden plantejar esquemes d'inferència del tipus Modus Ponens i Resolució, a partir de la relació de deducció "semàntica" $\models_S$ entre conjunts de LS-enunciats i LS-enunciats.

Donat un conjunt de LS-S-enunciats Ω , es defineix la categoria $LS-MOD(S, \Omega)$ com la subcategoria de $LS-MOD(S)$ dels models $M \in LS-MOD(S)$ que satisfan tots els LS-enunciats de Ω , és a dir, $LS-MOD(S, \Omega) = \{M / M \models_S \sigma, \text{ per a tot } \sigma \in \Omega\}$.

Aleshores, la relació de deducció que notarem per $\models_S$, entre conjunts de LS-enunciats i LS-enunciats es defineix de la forma usual:

$$\Omega \models_S \sigma \text{ si i només si } M \models_S \sigma \text{ per a tot } M \in LS-MOD(S, \Omega)$$

Per qüestions de simplicitat tractarem només el cas proposicional, on la relació de deducció, per a cada signatura S de $SIGN$, la podem expressar així:

$\{(s_1, W_1), \dots, (s_n, W_n)\} \models_S (s, W)$ si i només si per a tota S -valoració V tal que $V(s_1) \in W_1, \dots, V(s_n) \in W_n$ aleshores també és $V(s) \in W$.

Degut a que si es verifica $\{(s_1, W_1), \dots, (s_n, W_n)\} \models_S (s, W)$ també es verifica $\{(s_1, W_1), \dots, (s_n, W_n)\} \models_S (s, W')$, on $W \subseteq W'$, interessarà precisar si una deducció és *minimal* en el següent sentit:

Definició 3.1.

La deducció $\{(s_1, W_1), \dots, (s_n, W_n)\} \models_S (s, W)$ es dirà que és *minimal* si per a tot $w \in W$, existeixen $w_1 \in W_1, \dots, w_n \in W_n$, i una S -valoració V tal que $V(s_1) = w_1, \dots, V(s_n) = w_n$ i $V(s) = w$.

Com és usual, donada una signatura S , aquí també tindrem el concepte de S -satisfactibilitat (o consistència) d'un conjunt de LS-S-enunciats:

Definició 3.2.

*Un conjunt de LS-S-enunciats $\{ (s_1, W_1), \dots, (s_n, W_n) \}$ serà **S-satisfactible** (o **S-consistent**) si existeix una S-valoració V tal que $V(s_1) \in W_1, \dots, V(s_n) \in W_n$.*

A partir d'aquesta definició, és immediat observar que $\{(s_1, W_1), \dots, (s_n, W_n)\}$ serà consistent si existeixen $w_1 \in W_1, \dots, w_n \in W_n$ tals que $\{(s_1, \{w_1\}), \dots, (s_n, \{w_n\})\}$ és consistent.

Els esquemes de deducció que seran objecte d'atenció en els pròxims apartats seran els que responen en general a les dues següents formulacions:

$$\{ (p, W_1), (p \rightarrow q, W_2) \} \models_S (q, W_3) \quad \textbf{Modus Ponens}$$

$$\{ (\neg p \vee q, W_1), (p \vee r, W_2) \} \models_S (q \vee r, W_3) \quad \textbf{Resolució}$$

Per a cada esquema i en el cas $|LS| = [0,1]$, on les operacions AND, OR, NEG i IMP venen donades per una t-norma T , una t-conorma S , una funció de negació forta n , i una funció d'implicació I respectivament, s'estudiarà en primer lloc quines són les condicions que han de complir W_1 i W_2 per a que siguin consistents els LS-enunciats de la part antecedent, i en cas de ser-ho, es donarà el subconjunt W_3 de $[0,1]$ solució de les formulacions anteriors.

NOTA: A partir d'ara, atès que en l'estudi que segueix es pot suposar que es treballa sempre amb una mateixa signatura S , s'obviaran totes les referències a la tal signatura.

3.1. Esquemes de Modus Ponens.

L'esquema general a considerar serà:

$$\{ (p, W_1), (p \rightarrow q, W_2) \} \models (q, W_3), \text{ on } W_1, W_2, W_3 \subset [0,1].$$

Suposat que el connectiu implicació vingui representat per una funció d'implicació I , la condició de consistència pel conjunt de $[0,1]$ -enunciats $\{ (p, W_1), (p \rightarrow q, W_2) \}$, és a dir, que existeixi al menys una valoració V tal que $V(p) \in W_1$ i $V(p \rightarrow q) \in W_2$, particularitzada en aquest tipus d'esquema és la següent:

$\{ (p, W_1), (p \rightarrow q, W_2) \}$ és consistent si, i només, si existeix $x \in W_1$ i $z \in W_2$ tal que $z = I(x,y)$ per a algun $y \in [0,1]$.

A continuació considerarem dos esquemes particulars d'interès. En cadascun d'ells es farà un estudi detallat per a R-implicacions i S-implicacions.

*** ESQUEMA MP-1:** $\{ (p, \{a\}), (p \rightarrow q, \{b\}) \} \models (q, W)$

El planteig d'aquest esquema es tradueix a cercar les solucions del següent problema:

$$\begin{array}{rcl} I(x,y) & = & b \\ x & = & a \\ \hline y & = & ? \end{array}$$

on $x = V(p)$ i $y = V(q)$.

A continuació, s'estudiarà la formulació detallada d'aquest esquema pels casos en que I sigui una R-implicació, o bé, una S-implicació. Ara bé, independentment de quina sigui la funció d'implicació particular, es pot assegurar que sempre es preserva el cas clàssic tal com ens ho demostra la següent proposició.

Proposició 3.1.1.

Per a qualsevol implicació I, el següent esquema és minimal:

$$\{ (p, \{1\}), (p \rightarrow q, \{1\}) \} \models (q, \{1\})$$

Demostració:

És immediat, ja que si és $I(1,y) = 1$, aleshores és necessàriament $y = 1$. ♦

R-IMPLICACIONS

En tot aquest subapartat, I serà la R-implicació generada per una t-norma T, és a dir $I(x,y) = \text{Sup}\{ c / T(x,c) \leq y \}$. D'entrada, podem fer les dues següents observacions de caràcter general:

1) El fet que per a les R-implicacions sigui $I(x,y) = 1$ sii $x \leq y$, porta com a conseqüència que, quan $b = 1$, aleshores $\{ (p, \{a\}), (p \rightarrow q, \{b\}) \}$ és consistent per a qualsevol a, i la solució és $W = [a, 1]$.

2) Anàlogament, és immediat observar que si $a=0$, aleshores només pot ser $b = 1$, i consegüentment, $W = [0,1]$.

Així doncs, queda per veure la condició de consistència en el cas $b < 1$ i $a > 0$. Distingirem si la t-norma T és arquimediana o no, i si ho és, si el generador additiu de T és estricte o no (vegi's apèndix 1). En els cas de les t-normes no arquimedians, centrarem l'estudi per a $T = \text{Min}$, ja que com és conegut qualsevulla t-norma no arquimediana és suma ordinal de t-normes arquimedians amb el mínim. La R-implicació associada a $T = \text{Mín}$ és la funció definida com $I(x,y) = 1$, si $x \leq y$, $I(x,y) = y$ altrament.

Proposició 3.1.2.

i) Si T és arquimediana estricte, aleshores:

$\{ (p, \{a\}), (p \rightarrow q, \{b\}) \}$ és sempre consistent excepte en el cas $b < 1, a = 0$.

ii) Si T és arquimediana no estricte de generador f , aleshores:

$\{ (p, \{a\}), (p \rightarrow q, \{b\}) \}$ és consistent sii $f(a)+f(b) \leq f(0)$.

iii) Si $T = \text{Mín}$, aleshores:

$\{ (p, \{a\}), (p \rightarrow q, \{b\}) \}$ és consistent sii $b = 1$ o $b < a$.

Demostració:

i) Anem a veure que en el cas $b < 1$ i $a > 0$ sempre hi ha solució i la solució és $y = T(a,b)$. En efecte, si $b < 1$, ha de ser $x > y$. Aleshores $I(x,y) = f^{-1}(f(y)-f(x))$. Així, el problema és, donat $f^{-1}(f(y)-f(x)) = b$, i $x = a$, trobar quan val y . És immediat veure que sempre hi ha solució, i que la solució és $y = f^{-1}(f(a) + f(b)) = T(a,b)$.

ii) Atès que $I(x,y) = f^{-1}(f(y) - f(x))$, es tracta d'aïllar y en l'expressió $f^{-1}(f(y) - f(b)) = a$, on $b < 1$. Aleshores tenim $f(y) = f(a)+f(b)$, és a dir ha de ser $f(a)+f(b) \leq f(0)$, i en aquest cas és $y = f^{-1}(f(a) + f(b)) = T(a,b)$.

iii) Suposem $b < 1$. Aleshores si ha de ser $I(a,y) = b$, necessàriament ha de ser $a > y$ i $y = b$, i per tant $a > b$. Observi's que en aquest cas $y = b = \text{Mín}(a,b)$. ♦

NOTA: en el cas de l'implicació de Lukasiewicz $I(x,y) = \text{Min}(1, 1-x+y)$, generada per la t-norma $T(x,y) = \text{Max}(0, x+y-1)$ de generador additiu $f(x) = 1-x$, la condició de consistència expressada en la proposició anterior es tradueix per $a+b \geq 1$.

Un cop suposada la consistència, el següent teorema dóna la formulació del esquema MP-1 per a qualsevol R-implicació.

Teorema 3.1.3.

Sigui I la R-implicació generada per la t-norma contínua T.

Si $\{ (p, \{a\}), (p \rightarrow q, \{b\}) \}$ és consistent, aleshores tenim els següents esquemes minimal:

$$\{ (p, \{a\}), (p \rightarrow q, \{b\}) \} \models (q, [a, 1]), \quad \text{si } b = 1$$

$$\{ (p, \{a\}), (p \rightarrow q, \{b\}) \} \models (q, T(a, b)), \quad \text{si } b < 1$$

Demostració:

Només cal veure el cas $b < 1$. Si $b < 1$ aleshores ha de ser $a > y$, i si T és contínua existeix $z < 1$ tal que $T(a, z) = y$, i per tant és $b = I(a, y) = \sup\{ c / T(a, c) = y \}$, i degut altra cop a la continuïtat de T, ha de ser $T(a, b) = y$, tal com es volia demostrar. ♦

S-IMPLICACIONS

Sigui ara $I(x, y) = S(n(x), y)$, on S és una t-conorma contínua i n una negació forta. Aleshores el planteig de l'esquema 1, i.e. $\{ (p, \{a\}), (p \rightarrow q, \{b\}) \} \models (q, W)$, porta a resoldre el problema

$$\begin{array}{rcl} S(n(x), y) & = & b \\ x & = & a \\ \hline y & = & ? \end{array}$$

on $x = V(p)$ i $y = V(q)$.

La condició de consistència de $\{ (p, \{a\}), (p \rightarrow q, \{b\}) \}$ quan el connectiu implicació ve representat per una S-implicació, a diferència del cas de les R-implicacions, es pot donar de forma general en la següent proposició.

Proposició 3.1.4.

El conjunt d'enunciats $\{ (p, \{a\}), (p \rightarrow q, \{b\}) \}$ és consistent sii $b \geq n(a)$.

En el cas usual de $n(x) = 1-x$, la condició resulta ser $a+b \geq 1$.

Demostració:

En efecte, si $\{ (p, \{a\}), (p \rightarrow q, \{b\}) \}$ és consistent, aleshores existeix y tal que $S(n(a), y) = b$. Això vol dir que ha de ser $b \geq n(a)$. Recíprocament si és $b \geq n(a)$, aleshores per la continuïtat de S i per les condicions de contorn $S(n(a), 0) = a$ i $S(n(a), 1) = 1$, existeix y tal que $S(n(a), y) = b$. ♦

És interessant observar que en aquest cas de les S -implicacions, la condició de consistència és independent de la particular t -conorma utilitzada en la definició de la S -implicació, i només depèn de la funció de negació emprada. Per últim, el següent teorema ens dóna la formulació del esquema de Modus Ponens MP-1 per a S -implicacions un cop suposada la consistència, i dependent del tipus de t -conorma emprada en la definició de la implicació. Vegi's l'apèndix 1 per a un breu resum dels tipus de t -conormes així com els seus generadors additius i les seves quasi-inverses.

Teorema 3.1.5.

Sigui $I(x, y) = S(n(x), y)$, on S és una t -conorma.

Aleshores, si $\{ (p, \{a\}), (p \rightarrow q, \{b\}) \}$ és consistent (és a dir, $b \geq n(a)$), tenim els següents esquemes minimal:

(i) si S és una t -conorma arquimediana estricta

$$\{ (p, \{a\}), (p \rightarrow q, \{b\}) \} \models (q, [0, 1]), \quad \text{si } b = 1 \text{ i } a = 0$$

$$\{ (p, \{a\}), (p \rightarrow q, \{b\}) \} \models (q, \{S^{\wedge}(n(a)/b)\}), \quad \text{altrament}$$

(ii) si S és una t -conorma arquimediana no estricta

$$\{ (p, \{a\}), (p \rightarrow q, \{b\}) \} \models (q, [S^{\wedge}(n(a)/b), 1]), \quad \text{si } b = 1$$

$$\{ (p, \{a\}), (p \rightarrow q, \{b\}) \} \models (q, \{S^{\wedge}(n(a)/b)\}), \quad \text{altrament}$$

(iii) si S és la t -conorma Màx

$$\{ (p, \{a\}), (p \rightarrow q, \{b\}) \} \models (q, [0, n(a)]), \quad \text{si } b = n(a)$$

$$\{ (p, \{a\}), (p \rightarrow q, \{b\}) \} \models (q, \{b\}), \quad \text{altrament}$$

on $S^{\wedge}$ denota la quasi-inversa de S .

Demostració:

(i) Sigui g el generador additiu de S , o sigui $S(x,y) = g^{-1}(g(x)+g(y))$, i sigui $y=V(q)$. Aleshores hem de resoldre l'equació $S(n(a),y) = b$. En el cas de que $b=1$ i $a=0$, és evident que la solució és tot l'interval $[0,1]$ ja que $S(1,y) = 1$ es verifica per a tot y de $[0,1]$. Considerem doncs el cas que $a \neq 0$. Aleshores l'equació es pot expressar com $g^{[-1]}(g(n(a))+g(y)) = b$, o bé per S estricta com $g(y) = g(b)-g(n(a))$, i per tant serà $y = g^{-1}(g(b)-g(n(a))) = S^{(n(a)|b)}$. Observi's que si $b=1$, aleshores $y=1$, independentment de quan valgui a , sempre que sigui diferent de 0.

(ii) Com en el cas anterior, sigui g el generador additiu de S , o sigui $S(x,y) = g^{[-1]}(g(x)+g(y))$, i sigui $y=V(q)$. Considerem l'equació $g^{[-1]}(g(n(a))+g(y)) = b$. Si $b = 1$, aleshores ha de ser necessàriament $g(n(a))+g(y) \geq g(1)$, o bé equivalentment ha de ser $y \geq g^{-1}(g(1)-g(n(a))) = S^{(n(a)|1)}$. Per altra part, si $b < 1$, aleshores l'equació passa a ser $g^{-1}(g(n(a))+g(y)) = b$, i no hi ha cap problema per aïllar y , donant com a resultat $y = g^{-1}(g(b)-g(n(a))) = S^{(n(a)|b)}$, tal com es volia demostrar.

(iii) L'equació a considerar ara és $M\ddot{a}x(n(a),y) = b$. Aleshores és clar que si $b = n(a)$ qualsevol $y \leq n(a)$ n'és solució. En canvi, si $b > n(a)$, aleshores només pot ser solució $y = b$. ♦

*** ESQUEMA MP-2:** $\{ (p, [a,1]), (p \rightarrow q, [b,1]) \} \models (q,W)$

Aquest segon esquema planteja una deducció tipus Modus Ponens quan són conegudes fites inferiors pel condicional i antecedent. Així doncs el que es tracta és de solucionar el següent problema:

$$\begin{array}{rcl} I(x,y) & \geq & b \\ x & \geq & a \\ \hline y & = & ? \end{array}$$

on $x = V(p)$ i $y = V(q)$.

A diferència del esquema MP-1, el conjunt d'enunciats $\{ (p, [a,1]), (p \rightarrow q, [b,1]) \}$ és sempre consistent, ja que, com a mínim, tota valoració V tal que $V(p) = V(q) = 1$, satisfà a $(p, [a,1])$ i a $(p \rightarrow q, [b,1])$.

D'altra banda, la solució al esquema MP-2 també es pot donar d'una forma general, tal com prova la següent proposició.

Proposició 3.1.8.

Per a qualsevol R-implicació o S-implicació I, el següent esquema de deducció és minimal:

$$\{ (p, [a,1]), (p \rightarrow q, [b,1]) \} \models (q, [m_I(a,b),1]),$$

on m_I és la funció generadora de Modus Ponens associada a I (§1, 3.3).

Demostració:

Recordem que segons el lema 3.4 del capítol 1, per les R-implicacions i S-implicacions l'ínfim es compleix que $I(x,y) \geq b$ si i només si $m_I(x,b) \leq y$. Aleshores la monotonia de m_I i el fet que $x \geq a$ porta a que $y \geq m_I(a,b)$. La minimalitat de la deducció prové del fet que es compleix $I(a, m_I(a,b)) \geq b$. ♦

NOTA: Observi's que aquest tipus d'esquema amb fites inferiors pels valors de la premissa i del condicional (de fet només caldria en el condicional), concorda amb l'obtingut en el capítol 1 a partir de consideracions fetes bàsicament sobre quines eren les propietats exigibles a un tal esquema d'inferència.

3.2. Esquemes de Resolució.

Els esquemes que anem a considerar en aquesta secció, tal com ja s'ha indicat, seran els dels tipus:

$$\{ (\neg p \vee q, W_1), (p \vee r, W_2) \} \models (q \vee r, W_3), \text{ on } W_1, W_2, W_3 \subset [0,1]$$

Si S és la t-conorma contínua que modelitza el connectiu disjunció $\vee$, i n és la funció de negació corresponent a $\neg$, aleshores la consistència dels enunciats $\{ (\neg p \vee q, W_1), (p \vee r, W_2) \}$ es particularitza a la següent condició:

$\{ (\neg p \vee q, W_1), (p \vee r, W_2) \}$ és consistent sii existeixen $w_1 \in W_1$ i $w_2 \in W_2$ tal que $w_1 = S(n(x),y)$ i $w_2 = S(x,z)$ per a alguns $x,y,z \in [0,1]$.

Anàlogament al cas dels esquemes de Modus Ponens, a continuació s'estudiaran més detalladament dos esquemes més particulars.

* **ESQUEMA R-1:** $\{ (\neg p \vee q, \{a\}), (p \vee r, \{b\}) \} \models (q \vee r, W)$

El problema que planteja aquest esquema és, donat $V(\neg p \vee q) = a$ i $V(p \vee r) = b$, dir quelcom sobre $V(q \vee r)$. Dit d'altra manera, el problema plantejat és

$$\begin{array}{rcl} S(n(x), y) & = & a \\ S(x, z) & = & b \\ \hline S(y, z) & = & ? \end{array}$$

, és a dir, saber quan pot valdre $S(y, z)$ si sabem que $S(n(x), y) = a$, i $S(x, z) = b$, on x , y i z representen $V(p)$, $V(q)$ i $V(r)$ respectivament.

La següent proposició dóna una condició necessària i suficient per a la consistència dels enuncisats premissa del esquema R-1.

Proposició 3.2.1.

El conjunt d'enunciats $\{ (\neg p \vee q, \{a\}), (p \vee r, \{b\}) \}$ és consistent si i només si es compleix la relació $b \geq n(a)$.

Demostració:

Segui $S(n(x), y) = a$ i $S(x, z) = b$. Per la pròpia condició de ser S una t-conorma, tenim que $n(x) \geq a$, i que $x \geq b$, o sigui ha de ser $b \geq n(a)$. Queda vista doncs la necessitat de la relació. Anem a veure la suficiència. En efecte, atès que $S(n(a), 0) = n(a)$ i $S(n(a), 1) = 1$, la continuïtat de S assegura que existeix c tal que $S(n(a), c) = b$. Aleshores, prenent $x = n(a)$, $y = 0$, $z = c$, tenim $S(n(x), y) = a$ i $S(x, z) = b$. És a dir, tota valoració V tal que $V(p) = n(a)$, $V(q) = 0$, i $V(r) = c$, satisfà al conjunt d'enunciats $\{ (\neg p \vee q, \{a\}), (p \vee r, \{b\}) \}$. ♦

Cal remarcar que aquesta condició de consistència per l'esquema R-1 és idèntica a la de l'esquema MP-1 per a S-implicacions. Així doncs també val aquí l'observació que en aquest esquema la consistència només depèn de la funció de negació n , i no de la t-conorma emprada.

Una conseqüència d'aquesta proposició que serà d'utilitat més endavant és el següent corol·lari.

Corol·lari 3.2.2.

Sigui S una t -conorma contínua, n una funció de negació, i $a, b, x \in [0,1]$. Aleshores les següents condicions són equivalents.:

- i) *existeixen $y, z \in [0,1]$ tals que $S(n(x), y) = a$ i $S(x, z) = b$*
- ii) *$n(a) \leq x \leq b$*

Demostració:

És immediat que i) implica ii). Recíprocament, si és $n(a) \leq x \leq b$, val la desigualtat $n(x) \geq a$, i en particular també $x \geq b$. Aleshores per la continuïtat i les condicions de contorn de S , forçosament existeixen y i z tals que $S(n(x), y) = a$ i $S(x, z) = b$. ♦

Sigui el subconjunt de $[0,1]^2$, $DS = \{ (x, y) / x, y \in [0,1], x \leq y \}$. Donada una t -conorma S , podem considerar les següents funcions $S^\wedge, S^\# : DS \rightarrow [0,1]$

$$S^*(x|y) = \text{Inf}\{ c \in [0,1] / S(x, c) = y \} = S^\wedge(x|y)$$

$$S^\#(x|y) = \text{Sup}\{ c \in [0,1] / S(x, c) = y \}$$

Observi's que:

- S^* coincideix sobre DS amb la quasi-inversa de S , $S^\wedge$
- Si S és arquimediana estricta o $S = \text{Màx}$, $S^\wedge = S^\#$ sobre $DS - \{(1,1)\}$
- Si S és arquimediana no estricta, $S^\wedge = S^\#$ sobre $DS - \{(x,1) / x \in [0,1]\}$

Aquestes funcions són d'utilitat en el proper teorema, on es dona una expressió general del esquema R-1 per a qualsevol t -conorma contínua S i qualsevol negació forta n .

Teorema 3.2.3.

Siguin S la t -conorma contínua, i n la negació forta que interpreten als connectius $\vee$ i $\neg$, respectivament. Suposat que el conjunt d'enunciats $\{ (\neg p \vee q, \{a\}), (p \vee r, \{b\}) \}$ és consistent (i.e., $b \geq n(a)$), aleshores tenim el següent esquema de deducció minimal:

$$\{ (\neg p \vee q, \{a\}), (p \vee r, \{b\}) \} \models (q \vee r, [G^\wedge(a,b), G^\#(a,b)].)$$

on les funcions $G^\wedge$ i $G^\#$ venen definides per:

$$G^\wedge(a,b) = \text{Inf}\{ S(S^\wedge(n(x)/a), S^\wedge(x/b)) / n(a) \leq x \leq b \},$$

$$G^\#(a,b) = \text{Sup}\{ S(S^\#(n(x)/a), S^\#(x/b)) / n(a) \leq x \leq b \}$$

Demostració:

Si $\{ (\neg p \vee q, \{a\}), (p \vee r, \{b\}) \}$ és consistent amb $x = V(p)$, aleshores ha de ser $b \geq x \geq n(a)$, i segons el corol·lari anterior, els valors $S^{(n(x)|a)}$, $S^{(x|b)}$, $S^{\#(n(x)|a)}$, i $S^{\#(x|b)}$ estan ben definits. Això permet assegurar que donat el sistema

$$S(n(x), y) = a$$

$$S(x, z) = b$$

i fixat un x qualsevol de $[n(a), b]$, aleshores $y \in [S^{(n(x)|a)}, S^{\#(n(x)|a)}]$, i $z \in [S^{(x|b)}, S^{\#(x|b)}]$, i per tant $S(y, z)$ pertanyrà al interval:

$$[S(S^{(n(x)|a)}, S^{(x|b)}), S(S^{\#(n(x)|a)}, S^{\#(x|b)})]$$

A partir d'aquí, el resultat del teorema es segueix immediatament. ♦

NOTES:

- Si $a = n(b)$, aleshores $G^{(a,b)} = 0$, per a qualsevol S . En efecte, $x=n(a)$, $y=0$, i $z=0$ satisfan $S(1-x, y)=a$ i $S(x, z)=b$.
- $G^{\wedge}$ i $G^{\#}$ són funcions no decreixents en les dos variables.

La següent proposició dóna tres expressions particulars de l'esquema R-1.

Proposició 3.2.4.

Sigui $n(x) = 1-x$. Aleshores tenim

1) Per a $S(x, y) = \text{Max}(x, y)$, el següent esquema és minimal:

$$\{ (\neg p \vee q, \{a\}), (p \vee r, \{b\}) \} \models (q \vee r, [\text{Mín}(a, b), \text{Màx}(a, b)].)$$

2) Per a $S(x, y) = x+y-xy$, el següent esquema és minimal:

$$\{ (\neg p \vee q, \{a\}), (p \vee r, \{b\}) \} \models (q \vee r, [(a+b-1)/\text{max}(a, b), (a+b-1)/\text{min}(a, b)].)$$

3) Per a $S(x, y) = \text{Mín}(1, 1-x+y)$, el següent esquema és minimal:

$$\{ (\neg p \vee q, \{a\}), (p \vee r, \{b\}) \} \models (q \vee r, \{a+b-1\}.), \text{ si } a, b < 1$$

$$\{ (\neg p \vee q, \{a\}), (p \vee r, \{b\}) \} \models (q \vee r, [a+b-1, 1].), \text{ altrament.}$$

Demostració:

1) $S(x, y) = \text{Màx}(x, y)$

§2. Les lògiques multivaluades en el marc de les institucions.

$$x \leq y \quad S^\wedge(x|y) = \inf\{ c / \text{Max}(x,c) = y \} = y, \text{ si } x < y \\ = 0, \text{ si } x = y$$

$$S^\#(x|y) = \sup\{ c / \text{Max}(x,c) = y \} = y$$

$$G^\wedge(a,b)$$

$$\underline{1-a < b}$$

$$1-a \leq x \leq b: \quad S(S^\wedge(1-x|a), S^\wedge(x,b)) = \text{Màx}(0,b), \text{ si } x = 1-a \\ = \text{Màx}(a,b), \text{ si } 1-a < x < b \\ = \text{Màx}(a,0), \text{ si } x = b$$

$$G^\wedge(a,b) = \inf\{ S(S^\wedge(1-x|a), S^\wedge(x,b)) / 1-a \leq x \leq b \} = \text{Mín}(a,b)$$

$$\underline{1-a = b}$$

$$1-a = x = b: \quad S(S^\wedge(1-x|a), S(x,b)) = \text{Max}(0,0) = 0$$

$$G^\wedge(a,b) = \inf\{ S(S^\wedge(1-x|a), S^\wedge(x,b)) / 1-a = x = b \} = 0$$

$$G^\#(a,b)$$

$$1-a \leq x \leq b: \quad S(S^\#(1-x|a), S^\#(x,b)) = \text{Màx}(a,b),$$

$$G^\#(a,b) = \sup\{ S(S^\#(1-x|a), S^\#(x,b)) / 1-a \leq x \leq b \} = \text{Màx}(a,b)$$

$$2) \quad S(x,y) = x+y-xy$$

$$x \leq y \quad S^\wedge(x|y) = \inf\{ c / x+c-xc = y \} = (y-x)/(1-x), \text{ si } x < 1 \\ = 0, \text{ si } x = y = 1$$

$$S^\#(x|y) = \sup\{ c / x+c-xc = y \} = (y-x)/(1-x), \text{ si } x < 1 \\ = 1, \text{ si } x=y=1$$

$$G^\wedge(a,b)$$

$$\underline{a,b \neq 1}$$

$$0 < 1-a \leq x \leq b < 1: \quad S(S^\wedge(1-x|a), S^\wedge(x,b)) = S((a+x-1)/x, (b-x)/(1-x)) = \\ = 1 - (1-a)(1-b)/x(1-x)$$

$$G^\wedge(a,b) = \inf\{ S(S^\wedge(1-x|a), S^\wedge(x,b)) / 1-a \leq x \leq b \} = a+b-1 / \max(a,b),$$

§2. Les lògiques multivaluades en el marc de les institucions.

$$\underline{a = 1}$$

$$0 \leq x \leq b < 1: \quad S(S^{(1-x|1)}, S^{(x,b)}) = S(0,b) = b, \text{ si } x=0 \\ = S(1, (b-x)/(1-x)) = 1, \text{ si } x>0$$

$$G^{(1,b)} = \inf\{S(S^{(1-x|1)}, S^{(x,b)}) / 0 \leq x \leq b\} = b = a+b-1 / \max(a,b),$$

$$\underline{b = 1}$$

$$0 < 1-a \leq x \leq 1: \quad S(S^{(1-x|a)}, S^{(x,1)}) = S((a+x-1)/x, 1) = 1, \text{ si } x < 1 \\ = S(a, 0) = a, \text{ si } x = 1$$

$$G^{(a,1)} = \inf\{S(S^{(1-x|a)}, S^{(x,1)}) / 1-a \leq x \leq 1\} = a = a+b-1 / \max(a,b),$$

$$\underline{a = b = 1}$$

$$0 \leq x \leq 1: \quad S(S^{(1-x|1)}, S^{(x,1)}) = S(0,1) = 1, \text{ si } x=0 \\ = S(1,1) = 1, \text{ si } 0 < x < 1 \\ = S(1, 0) = 1, \text{ si } x = 1$$

$$G^{(a,b)} = \inf\{S(S^{(1-x|1)}, S^{(x,1)}) / 0 \leq x \leq 1\} = 1 = a+b-1 / \max(a,b),$$

$$\underline{G^{(a,b)} = a+b-1 / \max(a,b),}$$

$$G^{\#}(a,b)$$

$$\underline{a, b \neq 1}$$

$$0 < 1-a \leq x \leq b < 1: \quad S(S^{\#}(1-x|a), S^{\#}(x,b)) = S((a+x-1)/x, (b-x)/(1-x)) = \\ = 1 - (1-a)(1-b)/x(1-x)$$

$$\underline{1-a \leq b \leq 1/2, 1/2 \leq 1-a \leq b}$$

$$G^{\#}(a,b) = \sup\{S(S^{\#}(1-x|a), S^{\#}(x,b)) / 1-a \leq x \leq b\} = a+b-1 / \min(a,b),$$

$$\underline{1-a \leq 1/2 \leq b}$$

$$G^{\#}(a,b) = \sup\{S(S^{\#}(1-x|a), S^{\#}(x,b)) / 1-a \leq x \leq b\} = 1 - 4(1-a)(1-b),$$

$$\underline{a = 1}$$

$$0 \leq x \leq b < 1: \quad S(S^{\#}(1-x|1), S^{\#}(x,b)) = S(1,b) = 1, \text{ si } x=0 \\ = S(1, (b-x)/(1-x)) = 1, \text{ si } x>0$$

$$G^{\#}(1,b) = \sup\{S(S^{\#}(1-x|1), S^{\#}(x,b)) / 0 \leq x \leq b\} = 1 = a+b-1 / \min(a,b),$$

$$\underline{b = 1}$$

$$0 < 1-a \leq x \leq 1: \quad S(S^\#(1-x|a), S^\#(x,1)) = S((a+x-1)/x, 1) = 1, \text{ si } x < 1 \\ = S(a, 1) = 1, \text{ si } x = 1$$

$$G^\#(a,1) = \text{Sup}\{S(S^\#(1-x|a), S^\#(x,1)) / 1-a \leq x \leq 1\} = 1 = \\ = a+b-1 / \min(a,b),$$

$$\underline{a = b = 1}$$

$$0 \leq x \leq 1: \quad S(S^\#(1-x|1), S^\#(x,1)) = S(1,1) = 1, \text{ si } x=0 \\ = S(1,1) = 1, \text{ si } 0 < x < 1 \\ = S(1, 1) = 1, \text{ si } x = 1$$

$$G^\#(a,b) = \text{Sup}\{S(S^\#(1-x|1), S^\#(x,1)) / 0 \leq x \leq 1\} = 1 = a+b-1 / \min(a,b),$$

$$\underline{G^\#(a,b) = 1 - 4(1-a)(1-b), \text{ si } 1-a \leq 1/2 \leq b} \\ = a+b-1 / \min(a,b), \text{ altrament}$$

$$3) \quad S(x,y) = \text{Mín}(1, x+y)$$

$$x \leq y \quad S^\wedge(x|y) = \text{Inf}\{c / \text{Min}(1, x+c) = y\} = y-x$$

$$S^\#(x|y) = \text{Sup}\{c / \text{Min}(1, x+c) = y\} = y-x, \text{ si } y < 1 \\ = 1, \text{ si } y=1$$

$$G^\wedge(a,b)$$

$$1-a \leq x \leq b: \quad S(S^\wedge(1-x|a), S^\wedge(x,b)) = S(a+x-1, b-x) = a+b-1$$

$$\underline{G^\wedge(a,b) = a+b-1}$$

$$G^\#(a,b)$$

$$\underline{a, b \neq 1}$$

$$0 < 1-a \leq x \leq b < 1: \quad S(S^\#(1-x|a), S^\#(x,b)) = S(a+x-1, b-x) = a+b-1$$

$$\underline{a = 1}$$

$$0 \leq x \leq b < 1: \quad S(S^\#(1-x|1), S^\#(x,b)) = S(1, b-x) = 1,$$

$$\underline{b = 1}$$

$$0 < 1-a \leq x \leq 1: \quad S(S^\#(1-x|a), S^\#(x,1)) = S((a+x-1), 1) = 1,$$

$$\underline{a = b = 1}$$

$$0 \leq x \leq 1: \quad S(S^\#(1-x|1), S^\#(x,1)) = S(1,1) = 1,$$

$$\underline{G^\#(a,b) = a+b-1, \text{ si } a,b < 1} \\ \underline{= 1, \text{ altrament}}$$

◆

A diferència dels esquemes de Modus Ponens de l'apartat anterior, l'esquema de Resolució no garanteix sempre el cas clàssic. En efecte, la següent proposició ens ho demostra.

Proposició 3.2.5.

Sigui S la t-conorma i n la negació forta que interpreten als connectius $\vee$ i $\neg$ respectivament. L'esquema

$$\{ (\neg p \vee q, \{1\}), (p \vee r, \{1\}) \} \models (q \vee r, \{1\})$$

és vàlid, i alhora minimal, en els següents casos:

1. $S = \text{Màx}$.
2. S és una t-conorma arquimediana estricta
3. S és una t-conorma arquimediana no estricta amb $n \leq n_S$, on n_S és la negació forta generada pel generador additiu g de S , és a dir si $S(x,y) = g^{-1}(g(x)+g(y))$
 $n_S(x) = g^{-1}(g(1)-g(x))$.

Demostració.

És trivial pel cas $S = \text{Màx}$ o S arquimediana estricta, atès que verifiquen $S(x,y) = 1$ si $x=1$ o $y=1$. Suposem doncs que S sigui arquimediana no estricta de generador g . Aleshores de $S(n(x),y) = 1$ i de $S(x,z) = 1$, podem concloure que

$$g(n(x)) + g(y) \geq g(1), \text{ i}$$

$$g(x) + g(z) \geq g(1),$$

i per tant

$$g(y) + g(z) \geq 2g(1) - g(n(x)) - g(x) \geq 2g(1) - g(n_S(x)) - g(x) = g(1),$$

o sigui, $S(y,z) = 1$, tal com es volia demostrar. ◆

El següent exemple prova que la hipòtesi $n \leq n_S$ de la condició 3. és necessària per a la demostració.

Exemple:

Considerem la t -conorma arquimediana no estricta de Lukasiewicz $S(x,y) = \text{Mín}(x+y,1)$, que té com a generador additiu $g(x) = x$, i per tant $n_S(x) = 1-x$. Considerem ara la negació forta $n(x) = (1-x^2)^{1/2}$. És fàcil comprovar que si prenem $x = 0.6$, $y = 0.2$, i $z = 0.4$, tenim $S(n(x),y) = 1$, $S(x,z) = 1$, i en canvi $S(y,z) = 0.6 < 1$.

*** ESQUEMA R-2:** $\{ (\neg p \vee q, [a,1]), (p \vee r, [b,1]) \} \models (q \vee r, W)$

En aquest tipus d'esquema el conjunt d'enunciats premissa $\{ (\neg p \vee q, [a,1]), (p \vee r, [b,1]) \}$ sempre és consistent, ja que qualsevol valoració V tal que $V(q) = V(r) = 1$ el satisfà. Tantmateix, aquesta valoració fa que $V(q \vee r) = 1$, i per tant es pot assegurar que, en qualsevol cas, $1 \in W$.

La formulació general del esquema R-2 ens la dóna el següent teorema.

Teorema 3.2.6.

Siguin S la t -norma i n la negació forta que modelitzen els connectius $\vee$ i $\neg$ respectivament. Aleshores els següents esquemes són minimal:

$$\{ (\neg p \vee q, [a,1]), (p \vee r, [b,1]) \} \models (q \vee r, [0,1]), \quad \text{si } n(a) \geq b$$

$$\{ (\neg p \vee q, [a,1]), (p \vee r, [b,1]) \} \models (q \vee r, [G^{\wedge}(a,b),1]), \quad \text{si } n(a) < b.$$

$$\text{on } G^{\wedge}(a,b) = \text{Inf}\{ S(S^{\wedge}(n(x)/a), S^{\wedge}(x/b)) \mid n(a) \leq x \leq b \}.$$

Demostració:

Si és $n(a) \geq b$, aleshores, $\{ (\neg p \vee q, \{a\}), (p \vee r, \{n(a)\}) \}$ és consistent i dóna lloc al esquema minimal $\{ (\neg p \vee q, \{a\}), (p \vee r, \{n(a)\}) \} \models (q \vee r, [0,1])$, segons s'ha vist en l'apartat anterior. Això dóna validesa al esquema $\{ (\neg p \vee q, [a,1]), (p \vee r, [b,1]) \} \models (q \vee r, [0,1])$, en el cas de ser $n(a) \geq b$.

D'altra banda, si és $n(a) < b$, $\{ (\neg p \vee q, \{a\}), (p \vee r, \{b\}) \}$ és consistent, i per tant, segons el teorema 3.2.3, $G^{\wedge}(a,b) \in W$. Donat que, tal com s'ha comentat, també $1 \in W$, el resultat del teorema es segueix fàcilment. ♦

Capítol 3: INFERÈNCIA EN LòGICA DIFUSA

1. Introducció.

L.A. Zadeh va introduir en (Zadeh, 1973) la anomenada Regla Composicional d'Inferència (R.C.I.), també coneguda com el Modus Ponens Generalitzat, per tal de modelitzar la inferència en el marc de la lògica difusa a partir de proposicions condicionals.

Considerem un condicional de la forma "Si (X és A) aleshores (Y és B)", on X i Y són dues variables que prenen valors sobre universos U i V respectivament, i A i B són predicats, en general vagues, modelitzats per a sengles subconjunts difusos d'U i V. Per abús de notació denotarem igual els predicats que les seves distribucions de possibilitat associades. La representació del condicional vindrà donada en general per una distribució de possibilitat $H_{B/A}$ a $U \times V$. Aleshores, la R.C.I. de Zadeh permet obtenir una distribució de possibilitat B' sobre V, a partir d'una distribució de possibilitat A' sobre U i de la distribució condicional $H_{B/A}$ segons el següent esquema:

$$\begin{array}{c} \text{Si } (X \text{ és } A) \text{ aleshores } (Y \text{ és } B) \\ \\ (X \text{ és } A') \\ \hline (Y \text{ és } B') \end{array}$$

on la distribució B' s'obté de la següent forma:

$$B'(v) = \sup_U \{ \min(A'(u), H_{B/A}(u,v)) / u \in U \}, \text{ per a tot } v \in V,$$

és a dir, com a composició max-min d' A' amb $H_{B/A}$, considerades les distribucions com relacions difuses en U i en $U \times V$ respectivament.

Una de les característiques més remarcables d'aquesta regla és que permet fer raonament aproximat en el sentit que la regla és aplicable encara que la distribució A' difereixi de la del antecedent de condicional A, de forma que quant més diferent sigui

A' d' A , més diferent serà B' de B . Ara bé, per altra part, no sempre que $A' = A$, es pot assegurar que $B' = B$. Aquest i altres resultats no satisfactoris varen portar a plantejar-se la correctesa de la regla o bé de les representacions del condicional. En general, es suposa que, donada la relació existent entre conjunts difusos i lògiques multivaluades, la distribució condicional és de la forma

$$H_{B/A}(u,v) = I(A(u), B(v)),$$

on I és una funció d'implicació. Aquest fet va portar a qüestionar-se en (Valverde, Trillas, 1985) la utilització del operador mín en la formulació de la R.C.I., independentment de quin fóra el connectiu implicació I utilitzat per representar el condicional. La proposta que allà es feia era formular la R.C.I. com

$$B'(v) = \sup_u \{ m(A'(u), I(A(u), B(v))) / u \in U \}, \text{ per a tot } v \in V,$$

on m és en general una funció generadora de Modus Ponens per a I , és a dir, en termes utilitzats en el capítol anterior m és una funció que pertany a $FGMP_I$. Amb aquesta formulació desapareixen alguns problemes que hi havien amb la formulació original, però els resultats del capítol anterior sobre funcions generadores de Modus Ponens suggereixen el no utilitzar qualsevol $m \in FGMP_I$ sino la m_I , és a dir, la més gran de $FGMP_I$. La formulació final doncs que es considerarà de la R.C.I. serà la següent:

$$B'(v) = \sup_u \{ m_I(A'(u), I(A(u), B(v))) / u \in U \}, \text{ per a tot } v \in V,$$

Aquesta elecció s'acabarà de justificar en l'apartat següent.

Independentment de les consideracions que s'acaban de fer, Baldwin (Baldwin, 1979) donà una formulació alternativa de la R.C.I., i en general de tota la "Fuzzy Logic", a través de les anomenades qualificacions veritatives difuses ("fuzzy truth qualifications"), subconjunts difusos de l'interval unitat $[0,1]$ considerats com a valors de veritat (cert, poc cert, molt cert, fals, etc.) de la lògica difusa. Al no fer referència a cap distribució de possibilitat en particular, aquest enfoc permet estudiar el procés d'inferència només en funció de les qualificacions veritatives. Aquesta ha sigut la idea que ens ha guiat a partir del segon apartat, on, bàsicament s'estudia en primer lloc la naturalesa de les qualificacions veritatives i les seves combinacions com a regles d'un càlcul lògic, i sobre tot, la modelització de la inferència en aquest marc.

Al llarg d'aquest capítol i a menys de que s'indiqui el contrari, sempre que es faci referència a una implicació es suposarà que bé es tracta d'una R-implicació o bé d'una S-implicació.

2. Fonaments de la Regla Composicional d'Inferència.

Donada una distribució de possibilitat P_X per a la variable X sobre l'univers U , i una distribució P_Y per a la variable Y sobre l'univers V , la distribució de possibilitat de Y condicionada a X sobre $U \times V$ ve definida per

$$P_{Y/X}(u,v) = I(P_X(u), P_Y(v)),$$

on I és una funció d'implicació.

D'altra banda, la Regla Composicional d'Inferència (R.C.I.),

$$P'_Y(v) = \text{Sup}\{ m_I(P'_X(u), P_{Y/X}(u,v)) / u \in U \}, \quad \forall v \in V$$

permet inferir una distribució de possibilitat P'_Y per a la variable Y , donada una distribució condicional $P_{Y/X}$ de Y respecte X i una distribució P'_X per a la variable X . La distribució inferida P'_Y no és qualsevol, sino que és precisament la que, juntament amb la distribució P'_X , indueix la distribució condicional de Y respecte a X més específica que conté a la distribució $P_{Y/X}$. Dit d'altra forma, tal com es demostrarà més endavant, la distribució P'_Y es pot expressar així:

$$P'_Y = \text{Min}\{ P \in [0,1]^V / I(P'_X, P) \geq I(P_X, P_Y) \}$$

Tal com s'ha comentat en l'apartat anterior, la importància d'aquesta regla d'inferència és que, un cop establert un lligam condicional entre un estat de referència de la variable Y respecte a un estat de referència de la variable X , (a través d'una distribució de possibilitat condicional $P_{Y/X}$ induïda per unes distribucions inicials P_X i P_Y de X i de Y respectivament), es pot aplicar a tot un seguit de situacions o estats de la variable X que no concorden exactament amb el supòsit inicial. Ara bé, com és d'esperar, com més s'allunyin aquestes situacions de la de referència, menys especificitat (e.g. menys informació) hi haurà en la conclusió. De fet, tal com es veurà, la R.C.I. admet una formulació (a través de les Forward Reasoning functions) que posa de manifest que la distribució inferida per a la variable Y (P'_Y) només depén de l'estat de referència de Y (P_Y) i del grau de compatibilitat o d'acord entre l'estat actual i el hipotètic o de referència de la variable X (descrits per P'_X i P_X respectivament.), mesurat en termes de funcions de compatibilitat o qualificacions veritatives.

El caràcter de raonament aproximat que se li otorga a aquest tipus de raonament prové del fet de que el procés inferencial descrit permet que una relació condicional entre dues variables en una situació determinada, pugui ser extesa a d'altres situacions "no massa diferents", és a dir, si es considera vàlida la proposició condicional

" si (X és A) aleshores (Y és B) "

aleshores també ho seran les proposicions condicionals del tipus

" si (X és A') aleshores (Y és B') "

on A' reflexa un estat semblant a A per a X, i $B' = \text{CRI}(A', I(A, B))$ és l'estat més semblant a B tal que la relació entre A' i B' preservi la de A i B. Això queda demostrat en el següent teorema.

Teorema 2.1.

Sigui I una implicació, i sigui B' la distribució de possibilitat en l'univers V inferida de la distribució A' en l'univers U i de la distribució condicional I(A, B) en $U \times V$, mitjançant la R.C.I., és a dir, $B'(v) = \text{Sup}\{ m_I(A'(u), I(A(u), B(v))) / u \in U \}$. Suposant normalitat en les distribucions, aleshores B' és la distribució més específica que conté a B i que verifica

$$I(A, B) \leq I(A', B'),$$

i per tant, $I(A', B')$ és la distribució condicional més específica entre les del tipus $I(A', P)$ que preserva $I(A, B)$.

Demostració:

Primerament anem a veure que $B' \geq B$. En efecte, $B'(v) = \text{Sup}\{ m_I(A'(u), I(A(u), B(v))) / u \in U \} \geq B(v)$. En segon lloc veiem que $I(A, B) \leq I(A', B')$. Pel lema 3.4 del capítol 1, tenim $I(A(u), B(v)) \leq I(A'(u), B'(v))$ si, i només si, $m_I(A'(u), I(A(u), B(v))) \leq B'(v)$, la qual cosa es verifica de forma immediata a partir de la definició de B'. Finalment, suposem que B'' sigui una distribució tal que $I(A', B'') \geq I(A, B)$. Pel lema 3.4 del capítol 1, tenim que, per a qualsevol $u \in U$, $m_I(A'(u), I(A(u), B(v))) \leq B''(v)$, i per tant també es complirà:

$$B''(v) \geq \text{Sup}\{ m_I(A'(u), I(A(u), B(v))) / u \in U \} = B'(v). \blacklozenge$$

Així doncs, queda vist que la R.C.I., que respon a l'esquema

Si X és A aleshores Y és B	$P_{Y/X}(u, v) = I(A(u), B(v))$
$X \text{ és } A'$	$P'_{X}(u) = A'(u)$
$Y \text{ és } B'$	$P'_{Y}(v) = B'(v)$

on $B'(v) = \text{Sup}\{ m_I(A'(u), I(A(u), B(v))) / u \in U \}$, (*)

es pot formular funcionalment a través d'una funció CRI de $[0,1]^U \times [0,1]^U \times V$ en $[0,1]^V$ com

$$B' = \mathbf{CRI}(A', I(A, B)) =_{DEF} \inf\{ C \in [0,1]^V \mid I(A', C) \geq I(A, B) \}$$

Seguidament anem a veure algunes propietats de la R.C.I., que donen una idea de quin és el seu comportament.

Proposició 2.2.

Sigui I una funció d'implicació, siguin A i A' distribucions de possibilitat sobre un univers U , i sigui B una distribució sobre un univers V . Suposant normalitat en les distribucions, aleshores es satisfan les següents propietats:

- (1) $CRI(A', I(A, B)) \leq CRI(A'', I(A, B))$, si $A' \leq A''$
- (2) $CRI(A', I(A, B)) \geq B$, per a qualsevol A'
- (3) $CRI(A', I(A, B)) = B$, si A' inclòs en A
- (4) $CRI(A', I(A, B)) = U$, si A' inclòs en el complementari d' A .

Demostració:

(1) immediat a partir de que m_I és creixent respecte a la primera variable.

(2) $CRI(A', I(A, B))(v) = \sup\{ m_I(A'(u), I(A(u), B(v))) \mid u \in U \} \geq \sup\{ m_I(A'(u), B(v)) \mid u \in U \} = B(v)$.

(3) Primer, anem a veure que $CRI(A, I(A, B)) = B$. Això és directe a partir del teorema 2.1. $CRI(A, I(A, B))(v) = \sup\{ m_I(A(u), I(A(u), B(v))) \mid u \in U \} \leq \sup\{ B(v) \mid u \in U \} = B(v)$. Ara, si $A' \leq A$, tenim, per una banda $CRI(A', I(A, B)) \geq B$ per (2), i per l'altra banda $CRI(A', I(A, B)) \leq CRI(A, I(A, B)) = B$, segons (1). Per tant, ha de ser necessàriament $CRI(A', I(A, B)) = B$.

(4) Suposem A' inclòs en $-A$, o sigui $A' \leq 1-A$ (o bé, $A \leq 1-A'$). Si A' és normal, existeix $u^* \in U$ tal que $A'(u^*) = 1$, i per tant $A(u^*) = 0$. Aleshores, $m_I(A'(u^*), I(A(u^*), B(v))) = 1$, o sigui $CRI(A', I(A, B))$ és la distribució idènticament igual a 1, la induïda per l'univers U . ♦

Les propietats (1)÷(4) es poden interpretar en termes semàntics:

(1): com menys específica és la hipòtesi, menys específica és la tesi

(2),(3): per més específica que sigui la hipòtesi, la tesi no podrà mai ser més específica que la de referència en el condicional, com a màxim igual, i en general ho serà menys

(4): en el cas d'hipòtesi falsa, res no es pot deduir.

Amb aquesta interpretació, queda clar que aquestes quatre propietats, juntament amb el resultat del teorema 2.1, són la contrapartida de les exigides a les funcions generadores de Modus Ponens definides en el marc de la lògica multivaluada. Així doncs, es pot considerar pròpiament que l'esquema de la R.C.I. correspon a un Modus Ponens Generalitzat, on les funcions CRI són les funcions generadores de Modus Ponens per a les distribucions condicionals definides a partir de I.

3. Funcions de compatibilitat i Qualificacions Veritatives

A (Zadeh, 1978) es va introduir el concepte de "compatibilitat" entre dues distribucions de possibilitat. Aquest concepte és clau per a la formulació que va donar Baldwin de la Regla Composicional d'Inferència (Baldwin, 1979) i que s'utilitzarà en els apartats següents.

Definició 3.1.

Donades dues distribucions de possibilitat A i B sobre un univers U, s'anomena funció de compatibilitat d'A donada B a la funció $\tau_{A/B}: [0,1] \rightarrow [0,1]$ definida per:

$$\tau_{A/B}(z) = \sup_u \{ B(u) / A(u) = z \}, \text{ si } A^{-1}(z) \neq \emptyset$$
$$= 0, \text{ altrament}$$

A la distribució B l'anomenarem distribució de referència.

Tal com s'indica a (Prade, 1978), la funció de compatibilitat conté com a informació els valors de les extensions proposades per Zadeh de les mesures de possibilitat i necessitat descrites a la pàg. 9 d'aquesta memòria en el cas de que tant la distribució associada a un enunciat com l'associada a la informació de referència no siguin "crisp". En efecte, definint

$$\text{Pos}_B(A) = \sup \{ \min(\mu_B(u), \mu_A(u)) / u \in U \}$$

$$\text{Nec}_B(A) = \inf \{ \max(1-\mu_B(u), \mu_A(u)) / u \in U \}$$

es compleix

$$\text{Pos}_B(A) = \text{Sup}\{ \min(\tau_{A/B}(x), x) / x \in [0,1] \}$$

$$\text{Nec}_B(A) = \text{Inf}\{ \max(1-\tau_{A/B}(x), x) / x \in [0,1] \}$$

La funció de compatibilitat d'una distribució A respecte a una altra B dóna una idea de quina és la mínima "deformació funcional" que hauria de sofrir A per tal d'incloure a B. Això ho demostrem en la següent proposició.

Proposició 3.2.

$\tau_{A/A'}$ és la funció f més petita tal que $f \circ A \geq A'$, és a dir,

$$\tau_{A/A'} = \text{Min}\{ f:[0,1] \rightarrow [0,1] / f \circ A \geq A' \}$$

(s'entén que el mínim ho és respecte a l'ordre puntual)

Demostració:

1) Sigui $f(A(u)) \geq A'(u)$ per a tot u d' U . Aleshores si $A(u) = z$, tindrem $f(z) \geq A'(u)$, o sigui $f(z)$ és una cota superior del conjunt $\{ A'(u) / A(u) = z \}$, i per tant serà $f(z) \geq \text{Sup}_u \{ A'(u) / A(u) = z \} = \tau_{A/A'}(z)$.

2) Anem a veure que $\tau_{A/A'} \circ A \geq A'$. En efecte, tenim que $\tau_{A/A'} \circ A(u) = \tau_{A/A'}(A(u)) = \text{Sup}_v \{ A'(v) / A(v) = A(u) \} \geq A'(u)$. ♦

L'anterior definició de funció de compatibilitat només contempla el cas que les dues distribucions estiguin definides sobre el mateix univers. De fet, és fàcil estendre la definició de compatibilitat quan, en general, l'univers de la distribució de referència conté a l'altra com una de les seves components.

Definició 3.3.

Donades una distribució de possibilitat A sobre un univers U, i una distribució de possibilitat B sobre un univers V tal que $V = U' \times U \times U''$, aleshores la funció de compatibilitat $\tau_{A/B}$ de A donada B es defineix de la següent forma:

$$\begin{aligned} \tau_{A/B}(z) &= \text{Sup}_u \{ \text{Proj}(B:U)(u) / A(u) = z \}, \text{ si } A^{-1}(z) \neq \emptyset \\ &= 0, \text{ altrament} \end{aligned}$$

on $Proj(B:U)$ és la projecció de la distribució B sobre l'univers U , o sigui,
 $(Proj(B:U))(u) = Sup_{u',u''} \{ B(u',u,u'') \mid u' \in U', u'' \in U'' \}$.

Anem a veure en la següent proposició com es pot expressar la compatibilitat entre algunes distribucions multidimensionals en funció de les compatibilitats entre els seus components.

Proposició 3.4.

Siguin A i A' distribucions sobre un univers U , i B i B' distribucions sobre un altre univers V . Aleshores, si suposem que $A(U) = B(V) = [0,1]$, tenim les següents relacions:

$$1. \tau_{A \wedge B / A' \wedge B'}(z) = Sup_{xy} \{ T(\tau_{A/A'}(x), \tau_{B/B'}(y)) \mid T(x,y)=z \}$$

$$2. \tau_{A \vee B / A' \wedge B'}(z) = Sup_{xy} \{ T(\tau_{A/A'}(x), \tau_{B/B'}(y)) \mid S(x,y)=z \}$$

$$3. \tau_{A \wedge B / A' \vee B'}(z) = Sup_{xy} \{ S(\tau_{A/A'}(x), \tau_{B/B'}(y)) \mid T(x,y)=z \}$$

$$4. \tau_{A \vee B / A' \vee B'}(z) = Sup_{xy} \{ S(\tau_{A/A'}(x), \tau_{B/B'}(y)) \mid S(x,y)=z \}$$

$$5. \tau_{\neg A / A'}(z) = \tau_{A/A'}(1-z).$$

Demostració:

$$\begin{aligned} 1. \tau_{A \wedge B / A' \wedge B'}(z) &= Sup_{uv} \{ T(A'(u), B'(v)) \mid T(A(u), B(v)) = z \} = \\ &= Sup_{xy} \{ T(Sup_u \{ A'(u) \mid A(u) = x \}, Sup_v \{ B'(v) \mid B(v) = y \}) \mid T(x,y) = z \} = \\ &= Sup_{xy} \{ T(\tau_{A/A'}(x), \tau_{B/B'}(y)) \mid T(x,y) = z \}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \tau_{A \vee B / A' \wedge B'}(z) &= Sup_{uv} \{ T(A'(u), B'(v)) \mid S(A(u), B(v)) = z \} = \\ &= Sup_{xy} \{ T(Sup_u \{ A'(u) \mid A(u) = x \}, Sup_v \{ B'(v) \mid B(v) = y \}) \mid S(x,y) = z \} = \\ &= Sup_{xy} \{ T(\tau_{A/A'}(x), \tau_{B/B'}(y)) \mid S(x,y) = z \}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \tau_{A \wedge B / A' \vee B'}(z) &= Sup_{uv} \{ S(A'(u), B'(v)) \mid T(A(u), B(v)) = z \} = \\ &= Sup_{xy} \{ S(Sup_u \{ A'(u) \mid A(u) = x \}, Sup_v \{ B'(v) \mid B(v) = y \}) \mid T(x,y) = z \} = \\ &= Sup_{xy} \{ S(\tau_{A/A'}(x), \tau_{B/B'}(y)) \mid T(x,y) = z \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \tau_{A \vee B / A' \vee B'}(z) &= Sup_{uv} \{ S(A'(u), B'(v)) \mid S(A(u), B(v)) = z \} = \\ &= Sup_{xy} \{ S(Sup_u \{ A'(u) \mid A(u) = x \}, Sup_v \{ B'(v) \mid B(v) = y \}) \mid S(x,y) = z \} = \\ &= Sup_{xy} \{ S(\tau_{A/A'}(x), \tau_{B/B'}(y)) \mid S(x,y) = z \} \end{aligned}$$

$$5. \tau_{\neg A/A'}(z) = \sup_u \{ A'(u) / (-A)(u) = z \} = \sup_u \{ A'(u) / A(u)=1-z \} = \tau_{A/A'}(1-z).$$



En els següents tres subapartats es comenten i es justifiquen tres interpretacions que es poden donar a les funcions de compatibilitat: com a mesura de relativa de conformitat ("matching"), com a qualificacions veritatives i com a modificadors semàntics.

3.1. Les funcions de compatibilitat com a una mesura relativa de conformitat.

En el marc possibilístic, el concepte de veritat s'entén generalment com una mesura relativa: un grau de conformitat entre enunciats, que parlen sobre estats, situacions o comportaments d'un sistema, i un conjunt, que anomenarem "evidencial" seguint la terminologia de (Ruspini, 89), d'aquells estats que són consistents amb l'evidència observada. Naturalment, aquesta mesura s'obté a través d'un procés de "matching" entre la representació del significat de cada enunciat i la representació del contingut d'aquella part del conjunt evidencial que sigui rellevant a l'enunciat en qüestió.

Així doncs, sigui $E = (X \text{ és } A') \& (Y \text{ és } B') \& (Z \text{ és } C') \& \dots$ el conjunt evidencial considerat, on A' , B' , C' ,... són subconjunts difusos d'universos U , V , W ,... respectivament, que indueixen sengles distribucions de possibilitat sobre els valors de les variables X , Y , Z , ... Considerem un enunciat del tipus $p = "X \text{ és } A"$, on A és un subconjunt difús del univers U . Aleshores la funció de compatibilitat entre A i A' (la projecció d' $E = A' \wedge B' \wedge C' \wedge \dots$ sobre l'univers U), subconjunt difús del interval unitat $[0,1]$, dóna l'anomenada *qualificació veritativa* (Baldwin, 1979) de p respecte a E :

$$QV(p/E) = \tau_{A/E} = \tau_{A/A'}$$

Tal com s'ha esmentat anteriorment (prop. 3.2), aquesta mesura es pot interpretar com aquella mínima transformació necessària sobre l'estat del sistema descrit per p per tal de ser un estat consistent amb l'evidència observada. Dit d'altra forma, $QV(p/E)$ dóna una idea del grau de proximitat o similitut entre diferents estats concebibles del sistema. Aquesta característica fonamental de les funcions de compatibilitat és la que explota la Regla Composicional d'Inferència, i que es posarà de relleu en el següent apartat 4. amb la formulació d'aquesta regla a través de les Funcions de Raonament Directe M_I :

$$\frac{p \rightarrow q \quad p'}{q'} \quad QV(q/q') = M_I(QV(p/p'))$$

Així doncs, la R.C.I. opera com un procés d'extrapolació que "aproxima la veritat" en el sentit de que produeix una proposició q' que és més general que el conseqüent de la regla inferencial q , i que el grau de semblança entre q i q' és funció del grau en que s'assemblen p i p' .

3.2. De les funcions de compatibilitat a les qualificacions veritatives.

Es conegut que l'estreta relació que hi ha entre la teoria dels conjunts difusos i la lògica multivaluada prové del fet de que, donat un conjunt difús A sobre un univers U , aleshores els valors de la funció de pertinença $\mu_A(u)$ són considerats com els graus de veritat de les proposicions " $A(u)$ " en una lògica infinitament valuada :

$$\mu_A(u) = v("X \text{ és } A" / X=u).$$

Traduït en termes de la teoria possibilista, l'anterior igualtat ens diu que

$$\text{Poss}[X = u / "X \text{ és } A"] = v("X \text{ és } A" / X=u),$$

o sigui, atés que " $X \text{ és } A$ ", la possibilitat que la variable X prengui el valor u és igual al grau de veritat de la proposició " $X \text{ és } A$ " quan $X = u$.

Anem a veure com es poden interpretar des d'aquest enfoc les funcions de compatibilitat, o més concretament les qualificacions veritatives. L'idea és que aquestes funcions ens donen el conjunt (crisp o difús) de possibles valors de veritat que pot pendre una proposició, donat un conjunt evidencial en general, o una altra proposició de referència en particular.

Aquesta idea sembla clara quan la proposició de referència és crisp. El cas més senzill és quan l'informació que es té és totalment precisa, i.e. que la variable X en qüestió pren un determinat valor u d' U . Aleshores, sigui D_u la distribució associada a l'enunciat " $X = u$ ", és a dir $D_u(v) = 1$ si $v = u$, $D_u(v) = 0$ altrament. És fàcil comprovar que τ_{A/D_u} dóna precisament la funció característica del conjunt crisp de $[0,1]$ format únicament pel valor $\mu_A(u)$.

Considerem ara com a enunciat de referència una proposició "X és B", on B és un subconjunt crisp d'U, o sigui la informació disponible és imprecisa però no vague. Aleshores $QV("X \text{ és } A"/"X \text{ és } B")$ dona una funció característica corresponent a un conjunt crisp de valors de $[0,1]$ que és precisament el conjunt $\{ v("X \text{ és } A"/X=u) / B(u)=1 \}$, és a dir els possibles valors de veritat que pot pendre la proposició "X és A" quan X pren valors sobre el subconjunt B.

Finalment considerem que la proposició de referència conté informació vague, és a dir, B és un element de $\tilde{P}(U)$. En aquest cas, $QV("X \text{ és } A"/"Y \text{ és } B")$ defineix un subconjunt difús de valors de $[0,1]$, de forma que cada valor té un grau de ser considerat com a possible valor de veritat de la proposició "X és A"

En resum, podríem dir que qualificar veritativament un enunciat ve a ser una generalització del que és una valoració en lògica multivaluada, on la proposició de referència vindria a jugar el paper de model, encara que incomplet o imprecís, i que, per tant, les qualificacions veritatives juguen el paper de valors de veritat de la lògica difusa. Així, la interpretació lingüística que s'els hi ha donat usualment a algunes d'aquestes funcions són:

<i>Absolutament cert:</i>	$\phi_T(x) = 1$, si $x=1$; $\phi_T(x) = 0$ altrament
<i>Cert:</i>	j , la identitat sobre $[0,1]$
<i>Indeterminat:</i>	ϕ_U , la funció idénticament igual a 1
<i>Fals:</i>	$1-j$
<i>Absolutament fals:</i>	$\phi_F(x) = 1$, si $x=0$; $\phi_F(x) = 0$ altrament.

3.3. Les qualificacions veritatives com a modificadors.

És interessant observar que, donada una proposició de "X és A", on A és un element de les parts difuses d'un univers U, aleshores podem considerar la següent funció:

$$cl(A/.): \tilde{P}(U) \rightarrow \tilde{P}(U)$$

$$cl(A/A') = \tau_{A/A'} \circ A, \text{ per a tot } A' \text{ de } \tilde{P}(U)$$

per la qual, per a cada possible referencial A', la funció de pertinença d'A és modificada al compondre-la amb la funció de compatibilitat respecte a A'. En realitat, aquesta funció $cl(A/.)$ és, per a cada A, un operador clausura. En efecte, tenim les següents propietats:

Lema 3.3.1.

Si $A' = hoA$, aleshores és $\tau_{A/A'}|_{A(U)} = h$

Demostració:

Sigui $z \in A(U)$, aleshores és $\tau_{A/A'}(z) = \sup_u \{ A'(u) / A(u) = z \} =$
 $= \sup_u \{ h(A(u)) / A(u) = z \} = \sup_u \{ h(z) / A(u) = z \} = h(z)$. ♦

Proposició 3.3.2.

Donat A de $\widehat{P}(U)$, la funció $cl(A/.)$ considerada abans és un operador clausura a $\widehat{P}(U)$, és a dir, verifica les següents propietats:

1. $cl(A/B) \geq B$, per a tot B de $\widehat{P}(U)$
2. $cl(A/.)$ és idempotent
3. si $B \leq C$, $cl(A/B) \leq cl(A/C)$

Demostració:

1. directa a partir de la proposició 3.2 ($\tau_{A/B} = \inf \{ h / h(A) \geq B \}$)
2. hem de veure que $\tau_{A/\tau_{A/B} \circ A} = \tau_{A/B} \circ A$ per a tot B de $\widehat{P}(U)$. Però això, és immediat ja que si anomenem $C = \tau_{A/B} \circ A$, pel lema anterior tenim que $\tau_{A/C} |_{A(U)} = \tau_{A/B} |_{A(U)}$, i per tant $\tau_{A/C} \circ A = \tau_{A/B} \circ A$.
3. Si és $B \leq C$, $\tau_{A/B}(z) = \sup_u \{ B(u) / A(u) = z \} \geq \sup_u \{ C(u) / A(u) = z \} = \tau_{A/C}(z)$, per a tot z de $A(U)$, i per tant, $cl(A/B) = \tau_{A/B} \circ A \leq \tau_{A/C} \circ A = cl(A/C)$. ♦

El fet de ser $cl(A/.)$ un operador clausura, i principalment la condició d'idempotència, permet considerar a les qualificacions veritatives com a modificadors lingüístics o semàntics de les proposicions, en el sentit següent:

Si tenim un enunciat $p = "X \text{ és } A"$ i la seva qualificació $QV(p/E)$ respecte a un referencial desconegut $E = "X \text{ és } B"$, aleshores a efectes inferencials, això és equivalent a tenir un referencial $E' = "X \text{ és } A"$, on $A' = QV(p/E) \circ A$ és un modificat d' A .

En efecte, encara que en general $A' = QV(p/E) \circ A \neq B$, degut a la proposició anterior tenim que $\tau_{A/A'} = QV(p/E) = \tau_{A/B}$, cosa que fa que els dos esquemes

Si "X és A" aleshores "Y és F"

Si "X és A" aleshores "Y és F"

$QV("X \text{ és } A"/E) = \tau$

"X és A' = $\tau \circ A$ "

"Y és F"

"Y és F"

tinguin la mateixa conclusió, i.e. $M_I(\tau) \circ F = CRI(A', I(A, F)) = F'$. A més, A' és la distribució menys específica (la més gran puntualment)

És a dir, es pot interpretar que qualificar una proposició és, en cert sentit, modificar el seu significat per tal de ser el més específic consistent amb la realitat observada.

4. Funcions de Raonament Directe.

En aquest apartat, es dóna una formulació alternativa de la R.C.I., basada en la que va donar Baldwin a (Baldwin, 1979), i s'en estudien les seves propietats i avantatges respecte a l'anterior. Comencem amb la definició de les funcions de raonament directe (F.R.D.), introduïdes a (Trillas, Valverde; 1987).

Definició 4.1.

*Sigui I una funció d'implicació, i m_I la funció generadora de Modus Ponens associada a I. La **Funció de Raonament Directe** (Forward Reasoning Function) M_I associada a I és una funció de $[0,1]^{[0,1]}$ en $[0,1]^{[0,1]}$ definida com*

$$M_I: [0,1]^{[0,1]} \rightarrow [0,1]^{[0,1]}$$

$$(M_I(\tau))(y) = \text{Sup}\{ m_I(\tau(x), I(x, y)) \mid y \text{ de } [0,1] \}$$

En el teorema següent, es dóna la nova formulació de la R.C.I., i s'estableix la seva equivalència amb la donada a l'apartat 2.

Teorema 4.2.

Siguin I una funció d'implicació i m_I la funció generadora de Modus Ponens associada a I. Siguin A i A' distribucions de possibilitat en U, i B una distribució en V. Sigui B' tal que

$$B'(v) = \text{Sup}\{ m_I(A'(u), I(A(u), B(v))) \mid u \text{ d}'U \}.$$

Aleshores també és

$$B' = M_I(\tau_{A/A'}) \circ B,$$

on M_I és la funció d'inferència directa associada a la funció de implicació I , i $\tau_{A/A'}$ és la funció de compatibilitat de A donat A' .

Demostració:

Atés que $\tau_{A/A'}(A(u)) = \sup_v \{ A'(v) / A(v) = A(u) \}$, podem escriure :
 $B'(v) = \sup_u \{ m_I(A'(u), I(A(u), B(v))) \} = \sup_u \{ m_I(\tau_{A/A'}(A(u)), I(A(u), B(v))) \} =$
 $\sup_x \{ m_I(\tau_{A/A'}(x), I(x, B(v))) \} = M_I(\tau_{A/A'})(B(v)). \blacklozenge$

NOTA: aquí s'ha suposat que $A(U)=[0,1]$.

Una conseqüència immediata del teorema és que $\tau_{B/B'} = M_I(\tau_{A/A'})$, o sigui, es pot entendre la R.C.I. com un procés en el que a partir de la qualificació veritativa de l'antecedent del condicional, s'obté una qualificació veritativa pel conseqüent. És des d'aquest punt de vista, que les qualificacions veritatives juguen el paper de valors de veritat a la lògica difusa. També solen rebre el nom d'etiquetes difuses.

NOTA: La decisió presa en anteriors apartats de treballar sempre amb distribucions de possibilitat normals (i.e. sempre hi ha algun punt en que la distribució pren el valor 1), és fàcil veure que aquí es tradueix en que les qualificacions veritatives que considerarem d'ara en endavant seran aquelles funcions h de $[0,1]$ en $[0,1]$ tals que $h(x)=1$ per a algun x de $[0,1]$, o bé dit d'altra forma, seran aquelles representades per subconjunts difusos normals de $[0,1]$.

De la mateixa forma que en el apartat anterior es donava una interpretació de la distribució inferida en termes de la distribució més específica que preservava una relació condicional (teorema 2.1), aquí es pot donar una caracterització semblant:

Teorema 4.3.

Sigui M_I la funció d'inferència directa associada a una implicació I , i sigui h una qualificació veritativa o etiqueta difusa (element de $[0,1]^{[0,1]}$). Aleshores, $M_I(h)$ és la qualificació τ més específica tal que

$$I \leq I_o(hx\tau).$$

Demostració:

En primer lloc veiem que $I \leq I_o(h \times M_I)$. Pel lema 3.4 del capítol 1, tenim $I(x,y) \leq I(h(x), M_I(h(y)))$ si, i només si, $m_I(h(x), I(x,y)) \leq M_I(h(y))$, la qual cosa es verifica de forma immediata a partir de la definició de $M_I(h)$. Suposem ara que τ sigui una

qualificació tal que $I \leq I_0(hx\tau')$. Pel lema 3.4 del capítol 1, tenim que, per a qualsevol x, y de $[0,1]$, $m_I(h(x), I(x, y)) \leq \tau'(y)$, i per tant, també es complirà

$$\tau'(y) \geq \sup\{ m_I(h(x), I(x, y)) / x \text{ de } [0,1] \} = M_I(h)(y). \spadesuit$$

Una altra conseqüència del teorema 4.2 és que la nova formulació de la regla composicional d'inferència posa de manifest que el seu comportament és independent de les particulars distribucions utilitzades, i només depèn de la funció M_I principalment, i d'una funció de compatibilitat en segon lloc. Així doncs, és interessant estudiar en més detall altres propietats de les funcions M_I que expliquin com respon la regla d'inferència davant diverses situacions. En la següent proposició, s'en descriuen algunes.

Proposició 4.4.

Sigui M_I la F.R.D. associada a una funció d'implicació I . Aleshores M_I satisfà les següents propietats:

$$(1) M_I(\tau) \geq j, \text{ per a tota } \tau \text{ de } [0,1]^{[0,1]} \text{ tal que } \tau^{-1}(j) \neq \emptyset$$

$$(2) M_I(\tau) \leq M_I(\tau') \text{ si } \tau \leq \tau'$$

$$(3) M_I(\tau) = j, \text{ per a tota } \tau \leq j \text{ tal que } \tau(1)=1, \quad (\text{en particular } M_I(j)=j)$$

$$(4) M_I(\tau)(y) \geq m_I(\tau(0), 1) \text{ per a qualsevol } y \text{ de } [0,1]$$

Demostració:

(1) Sigui $k = \min\{\tau^{-1}(j)\}$. Per a qualsevol y , el fet que $I(k, y) \geq y$ permet escriure $\sup_x \{m_I(\tau(x), I(x, y))\} \geq m_I(\tau(k), I(k, y)) = I(k, y) \geq y$. A més, en el cas particular de les R-implicacions, si $y \geq k$, aleshores és $M_I(\tau)(y)=1$. En efecte, $\sup_x \{m_I(\tau(x), I(x, y))\} \geq m_I(\tau(k), I(k, y)) = m_I(1, 1) = 1$.

(2) Sigui $\tau \leq \tau'$. Aleshores del fet que m_I és creixent respecte a la primera variable implica $M_I(\tau)(y) = \sup_x \{m_I(\tau(x), I(x, y))\} \leq \sup_x \{m_I(\tau'(x), I(x, y))\} = M_I(\tau')(y)$.

(3) Sigui $\tau \leq j$. Anem a veure primer que $M_I(\tau) \leq j$. En efecte, tenim $M_I(\tau)(y) = \sup_x \{m_I(\tau(x), I(x, y))\} \leq \sup_x \{m_I(x, I(x, y))\} \leq y$, atès que es verifica $m_I(x, I(x, y)) \leq y$, per a qualsevol y . Ara bé, d'altra banda, $\sup_x \{m_I(\tau(x), I(x, y))\} \geq m_I(1, I(1, y)) = y$, o sigui, conseqüentment ha de ser $M_I(\tau)=j$.

(4) $M_I(\tau)(y) = \sup_x \{ m_I(\tau(x), I(x, y)) \} \geq m_I(\tau(0), I(0, y)) = m_I(\tau(0), 1)$, per a qualsevol y de $[0, 1]$. ♦

La següent proposició dóna una propietat que serà important a l'hora de caracteritzar les qualificacions invariants per M_I .

Proposició 4.5.

Si I és contínua per la dreta respecte a la segona variable, aleshores es compleix la següent condició:

$$M_I(h) \leq h \text{ si i només si } I \leq I_o(hxh)$$

Demostració:

Tenim que $\sup_x \{ m_I(h(x), I(x, y)) \} \leq h(y)$ si, i només si, $m_I(h(x), I(x, y)) \leq h(y)$, i per tant, pel lema 3.4 del capítol 1, si, i només si, $I(x, y) \leq I(h(x), h(y))$. ♦

En els dos següents subapartats s'estudien a fons el comportament de les Funcions de Raonament Directe corresponents a S-implicacions i a R-implicacions.

4.1. Funcions de Raonament Directe per a R-implicacions.

Anem a veure d'entrada que, de fet, en el cas de les R-implicacions, les funcions M_I poden ser considerades com uns "operadors conseqüència generalitzats" definits sobre les parts difuses de $[0, 1]$, atès que, tal com prova la següent proposició, verifiquen les tres propietats característiques: la extensiva, la isotonia, i la idempotència. (S'entén que els elements de les parts difuses són subconjunts difusos normals, i.e., contenen com a mínim a un element amb grau de pertinença 1)

Proposició 4.1.1.

Sigui M_I una funció d'inferència directa associada a una R-implicació. Aleshores M_I compleix les següents condicions:

$$CQ-1) h \leq M_I(h), \text{ per a qualsevol } h \text{ de } [0, 1]^{[0, 1]} \quad (\text{extensiva})$$

$$CQ-2) \text{ si } h \leq h', \text{ aleshores } M_I(h) \leq M_I(h') \quad (\text{isotonia})$$

$$CQ-3) M_I(h) = M_I(M_I(h)), \text{ per a qualsevol } h \text{ de } [0, 1]^{[0, 1]} \quad (\text{idempotència})$$

Demostració:

Sigui I una R -implicació generada per una t -norma T , o sigui $m_I = T$.

CQ-1: $M_I(h)(y) = \sup_x \{ T(h(x), I(x, y)) \} \geq T(h(y), I(y, y)) = T(h(y), 1) = h(y)$.

CQ-2: propietat (3) de la proposició 4.1

CQ-3: 1. Del fet que $M_I(h) \geq h$ i que M_I és creixent, tenim $M_I(M_I(h)) \geq M_I(h)$.

$$\begin{aligned} 2. M_I(M_I(h))(y) &= \sup_x \{ T(M_I(h)(x), I(x, y)) \} = \\ &= \sup_x \{ T(\sup_z \{ T(h(z), I(z, x)) \}, I(x, y)) \} = \\ &= \sup_x \{ \sup_z \{ T(T(h(z), I(z, x)), I(x, y)) \} \} = \\ &= \sup_{xz} \{ T(h(z), T(I(z, x), I(x, y))) \} \leq \\ &\leq \sup_{xz} \{ T(h(z), I(z, y)) \} = M_I(h)(y). \end{aligned}$$

Així doncs, la proposició queda demostrada. ♦

Hem vist, per tant, que la M_I és un operador clausura definit sobre el reticle complet de les funcions de $[0, 1]$ en $[0, 1]$. Amb aquestes condicions és sabut que la imatge de M_I (els tancats) és un Inf-semireticle complet que conté al màxim (la funció idènticament 1), i determina unívocament a M_I de la forma

$$M_I(h) = \inf \{ h' \text{ tancat} / h' \geq h \}.$$

En el nostre cas, el sistema clausura associat a M_I és a més un reticle complet, i atès que M_I ve determinada per l'imatge, serà interessant caracteritzar els seus elements, que en el contexte de la regla composicional d'inferència, seran els valors de veritat difusos invariants per inferència. Aquests resultats es demostren a continuació. En efecte, la estructura del sistema clausura associat a una Funció d'Inferència Directa M_I ve donada en el següent teorema.

Teorema 4.1.2.

Donada una Funció d'Inferència Directa M_I , el sistema clausura associat a M_I és un reticle complet amb les operacions màx-mín.

Demostració:

Com s'ha comentat, només cal veure que és un Sup-semireticle complet. A partir de la continuïtat de les t -normes generadores de les implicacions I , és immediat veure que M_I és un morfisme de $[0, 1][0, 1]$ en $[0, 1][0, 1]$ respecte al màxim puntual, i per tant que el conjunt d'invariants és tancat respecte a aquesta operació. Queda per veure doncs la completesa. Siguin $\{ h_j / j \in J \}$ una família arbitrària d'etiquetes invariants. Anem a veure que $\forall h_j$ també és invariant. En efecte, tenim

$$\begin{aligned} M_I(\forall h_j)(y) &= \sup_x \{ T(\forall h_j(x), I(x, y)) \} = \sup_x \{ \vee (T(h_j(x), I(x, y))) \} = \\ &= \vee (\sup_x \{ T(h_j(x), I(x, y)) \}) = (\vee M_I(h_j))(y) = (\forall h_j)(y). \end{aligned} \quad \blacklozenge$$

El teorema següent caracteritza les etiquetes invariants per les M_I en el cas de les R-implicacions.

Teorema 4.1.3.

Sigui I una R-implicació. Aleshores, una etiqueta h és invariant per M_I , si i només si

$$I \leq I_o(hxh).$$

Demostració:

És una conseqüència immediata de la proposició 4.5 i de la propietat extensiva de les M_I com a operadors conseqüència, quan I és una R-implicació. ♦

Corol·lari 4.1.4.

Si h és una etiqueta invariant respecte a una M_I corresponent a una R-implicació, llavors h és una funció creixent.

Demostració:

En efecte, suposem $x \leq y$. Aleshores tenim $1 = I(x,y) \leq I(h(x),h(y))$, és a dir, $I(h(x),h(y)) = 1$, i per tant, necessàriament ha de ser $h(x) \leq h(y)$. ♦

Exemples:

Anem a donar les condicions necessàries i suficients sota les quals una etiqueta és invariant per M_I específiques per a tres R-implicacions: les generades per les t-normes Min, Prod i Luk. D'entrada, pel corol·lari anterior, podem suposar que les etiquetes són creixents, i que per tant valen 1 en 1. Així, $M_I(h)(y) = \sup_x \{ T(h(x), I(x,y)) \}$ es pot escriure com $M_I(h)(y) = \max(h(y), \sup_{x>y} \{ T(h(x), I(x,y)) \})$, de forma que és clar que h serà invariant si, i només si, es compleix $h(y) \geq H_I(y)$, on $H_I(y) = \sup_{x>y} \{ T(h(x), I(x,y)) \}$.

1. T=Min: $H_I(y) = \sup_{x>y} \{ T(h(x), I(x,y)) \} = \sup_{x>y} \{ \min(h(x), y) \} = \min(h(1), y) = y$. Per tant tindrem que h és invariant sii $h \geq j$.

2. T=Prod: $H_I(y) = \sup_{x>y} \{ T(h(x), I(x,y)) \} = \sup_{x>y} \{ h(x) \cdot (y/x) \}$. Aleshores serà $h(y) \geq H_I(y)$ sii $h(y) \geq h(x) \cdot y/x$, o sigui, sii $h(y)/y \geq h(x)/x$ per a $x>y$, o equivalentment sii $h(x)/x = g(x)$ és una funció decreixent, i per tant que $h(x) = x \cdot g(x)$ on $g(x)$ és qualsevol funció decreixent tal que $1 \leq g(x) \leq 1/x$.

3. T=Luk: $H_I(y) = \sup_{x>y} \{ T(h(x), I(x,y)) \} = \sup_{x>y} \{ y + (h(x) - x) \}$. Així serà $h(y) \geq H_I(y)$ sii $h(y) \geq h(x) + y - x$, o bé, sii $h(y) - y \geq h(x) - x$, i per tant sii $f(x) = h(x) - x$ és

una funció decreixent, o bé si $h(x)=f(x)+x$, on $f(x)$ és una funció decreixent qualsevol tal que $x \leq f(x) \leq 1+x$.

Per últim, com a conseqüència del caràcter d'operador conseqüència de les M_I quan la I és una R -implicació, es pot determinar quines són les famílies de funcions tancades per inferència. Aquest resultat dona la clau per a construir tals famílies.

Teorema 4.1.5.

Una família d'etiquetes V és tancada respecte a una M_I , on I és una R -implicació, si i només si existeix un subconjunt L de V tal que $V = L \cup M_I(L)$.

Demostració:

1. Si V és tancada ($M_I(V)=V$), només cal prendre $L = V$.
2. Recíprocament, suposem $V = L \cup M_I(L)$, i sigui $h \in V$. Aleshores, o bé $h \in L$, i per tant $M_I(h) \in M_I(L)$, i conseqüentment també $M_I(h) \in V$, o bé $h \in M_I(L)$, i per tant també $M_I(h) \in M_I(L)$, ja que en aquest cas és $M_I(h)=h$. ♦

Així doncs, tal com dèiem i a la vista d'aquest teorema, per a obtenir un conjunt d'etiquetes tancada per la M_I que contingui una determinada família de funcions, només caldrà afegir-li el conjunt d'imatges d'aquesta família per la M_I .

Exemple: Siguin les funcions $f_a:[0,1] \rightarrow [0,1]$ definides per

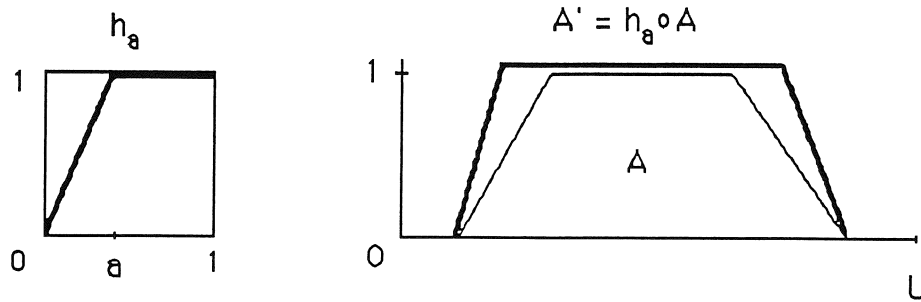
$$\begin{aligned} f_a(x) &= 0, \text{ si } x < a \\ f_a(x) &= 1, \text{ si } x \geq a \end{aligned}$$

i considerem la família $L = \{ f_a, a \in [0,1] \}$. Anem a calcular quin és $M_I(L)$, quan I és una R -implicació generada per la t -norma producte.

$$\begin{aligned} M_I(f_a)(y) &= f_a(y) \vee \sup_{x>y} \{ f_a(x) * y/x \} = y/a, \text{ si } y < a \\ &= 1, \text{ si } y \geq a \end{aligned}$$

Anomenem doncs h_a a les funcions $M_I(f_a)$. Llavors tenim:

1. $V = \{ h_a, f_a / a \in [0,1] \}$ és una família tancada per M_I
2. $IV = \{ h_a / a \in [0,1] \}$ és una família d'invariants per M_I , i per tant també és una subfamília tancada de V . La representació d'aquestes funcions, juntament amb el tipus de modificació que provoquen sobre distribucions trapezoïdals, és la següent:



4.2. Funcions de Raonament Directe per a S-implicacions.

En el cas que ens ocupa, si $I(x,y)=S(n(x),y)$ on S és una t-conorma i n una funció de negació forta, la Funció d'Inferència Directa associada a I s'escriu:

$$M_I(h)(y) = \sup_x \{ S^\wedge(I-h(x), S(I-x, y)) \},$$

on $S^\wedge$ és la quasi-inversa de S , definida per $S^\wedge(x,y) = \inf \{ c \in [0,1] / S(x,c) \geq y \}$. Les propietats més importants d'aquestes funcions venen resumides a l'apèndix 1 d'aquesta memòria.

En la següent proposició es resumeixen les característiques més importants de les M_I quan la t-conorma generadora de I és estricta.

Proposició 4.2.1.

Sigui $I(x,y) = S(1-x,y)$ la S-implicació corresponent a una t-conorma S estricta i a la negació usual $n(x) = 1-x$. Aleshores es compleixen les següents propietats:

- S1- $M_I(h) = 1$, si $h(0) > 0$.
- S2- $M_I(M_I(h)) = j$, si $h \leq j$
 $M_I(M_I(h)) = 1$, altrament.
- S3- existeixen h tals que $M_I(h) \neq M_I(M_I(h))$
- S4- h és invariant per M_I si i només si $h = j$, o bé $h = 1$.
- S5- $M_I^3 = M_I^2$.

Demostració:

S1- Si S és estricta llavors és $S^{\wedge}(a,1) = 1$ si $a < 1$. En aquest cas, tenint en compte que $1-h(0) < 1$, podem escriure, per a qualsevol y ,

$$M_I(h)(y) = \sup_x \{ S^{\wedge}(1-h(x), S(1-x,y)) \} \geq S^{\wedge}(1-h(0), 1) = 1,$$

i per tant la propietat S1 està demostrada.

S2- Si és $h=j$, s'ha vist anteriorment que $M_I(j) = j$, i per tant serà $M_I(M_I(j)) = M_I(j) = j$.

Si no és $h \leq j$, existeix $a < 1$ tal que $h(a) > a$. Anem a veure que en qualsevol cas serà $M_I(h)(0) > 0$, i per tant, segons la propietat S1 també serà $M_I(M_I(h)) = 1$. En efecte, $M_I(h)(0) = \sup_x \{ S^{\wedge}(1-h(x), 1-x) \} \geq S^{\wedge}(1-h(a), 1-a)$. Com que és $1-h(a) < 1-a$, aleshores necessàriament és $M_I(h)(0) = S^{\wedge}(1-h(a), 1-a) > 0$, tal com es volia demostrar.

S3- Considerem $a > 0$ i la funció h_a definida per $h_a(x)=1$, si $x \geq a$; $h_a(x) = 0$, si $x < a$. Anem a veure que $M_I(h_a) \neq M_I(M_I(h_a))$. En efecte, per una banda tenim $M_I(h_a)(y) = \sup_x \{ S^{\wedge}(1-h_a(x), S(1-x,y)) \} = \sup_{x \geq a} \{ S^{\wedge}(0, S(1-x,y)) \} = \sup_{x \geq a} \{ S(1-x,y) \} = S(1-a,y)$. Per altra banda no és $h_a \leq j$, i per tant, segons la propietat anterior, és $M_I(M_I(h_a)) = 1$.

S4- S'ha demostrat ja anteriorment que tant la funció identitat j i la funció idènticament igual a 1 són invariants. Anem a veure que no n'hi han més. Com a conseqüència de resultats del apartat anterior tenim que:

1. si és $h < j$, llavors és $M_I(h) = j \neq h$.
2. si no és $h \leq j$ essent $h(0) = 0$, llavors és $M_I(h)(0) > 0$, i per tant $M_I(h) \neq h$.
3. si no és $h \leq j$ essent $h \neq 1$ amb $h(0) > 0$, llavors és $M_I(h) = 1$, o sigui $M_I(h) \neq h$.

S5-És una conseqüència immediata de S2 i S4. ♦

Comentari: de l'anterior proposició es pot veure fàcilment que M_I^2 compleix les següents condicions

$$- h \leq M_I^2(h)$$

$$- M_I^2(h) \leq M_I^2(h'), \text{ si } h \leq h'$$

$$- M_I^2 \circ M_I^2 = M_I^2$$

o sigui, encara que la proposició anterior mostra que M_I no pot ser considerada com un operador conseqüència, si que ho pot ser M_I^2 . No obstant, aquesta interpretació no és gaire significativa atès que el conjunt imatge de M_I^2 només està format per dues funcions, la identitat i la idènticament igual 1.

4.3. Exemples.

Considerem la família paramètrica de funcions $\{ h_{ab} / a, b \in [0,1], a \leq b \}$, que donen les funcions característiques del conjunt d'interval tancats de $[0,1]$, és a dir les funcions definides per:

$$\begin{aligned} h_{ab}(x) &= 1, \text{ si } a \leq x \leq b \\ &= 0, \text{ altrament} \end{aligned}$$

En el cas que I sigui una R-implicació generada per T tenim:

- 1) T = Min: $M_I(h_{ab})(y) = y, \text{ si } y < a$
 $= 1, \text{ altrament}$
- 2) T = Prod: $M_I(h_{ab})(y) = y/a, \text{ si } y < a$
 $= 1, \text{ altrament}$
- 3) T = Luk: $M_I(h_{ab})(y) = 1-a+y, \text{ si } y < a$
 $= 1, \text{ altrament}$

En el cas que I sigui una S-implicació del tipus $I(x,y) = S(1-x,y) = 1-T(x,1-y)$ tenim:

- 1) T = Min: $M_I(h_{ab})(y) = \text{Max}(1-a,y)$
- 2) T = Prod: $M_I(h_{ab})(y) = 1-a+ay$
- 3) T = Luk: $M_I(h_{ab})(y) = 1-a+y, \text{ si } y < a$
 $= 1, \text{ altrament}$

5. Càlcul amb qualificacions veritatives.

En aquest apartat, anem a veure com es poden associar certes operacions entre aquestes funcions a diversos connectius lògics, per tal de fer operatives les Funcions de Raonament Directe quan la premissa del condicional és una proposició composta.

L'idea bàsica a l'hora de definir les diferents combinacions d'etiquetes que es proposen ha sigut que fossin coherents amb la modelització del procés d'inferència a

través de la Regla Composicional d'Inferència, i més concretament amb la formulació que les Funcions de Raonament Directe en donen.

5.1. Conjunció.

Considerem el següent esquema d'inferència, on la premissa està formada per la conjunció de dues proposicions:

Si (X és A) i (Y és B) aleshores (Z és C)

$E = [(X \text{ és } A'), (Y \text{ és } B')]$

$$(Z \text{ és } C' = \text{CRI}(T(A',B'), I(T(A,B), C)))$$

Sota condicions generals, hem vist que $C' = M_I(\tau_{T(A,B)}/T(A',B')) \circ C$, i per tant, segons la proposició 6.2, tindrem que $C' = M_I(\tau_{A/A'} \wedge_T \tau_{B/B'}) \circ C$, on l'operació $\wedge_T$ entre qualificacions ve definida per

$$\wedge_T : [0,1][0,1] \times [0,1][0,1] \rightarrow [0,1][0,1]$$

$$(\tau_1 \wedge_T \tau_2)(z) =_{\text{DEF}} \text{Sup}_{xy} \{ T(\tau_1(x), \tau_2(y)) \mid z = T(x,y) \}, \text{ per a tot } z \in [0,1],$$

on T és la t-norma que modelitza la conjunció en l'àlgebra de conjunts difusos que indueixen les distribucions de possibilitat en consideració. Aquesta definició permet expressar l'anterior esquema així:

Si (X és A) i (Y és B) aleshores (Z és C)

(X és A) és τ_1 , (Y és B) és τ_2

$$(Z \text{ és } C) \text{ és } \tau_3 = M_I(\tau_1 \wedge_T \tau_2)$$

Així doncs, prenent $\wedge_T$ com l'operador conjunció, assegurem que el seu comportament respecte a la inferència serà correcta. Aquesta definició generalitza la que va donar Baldwin en (Baldwin, 1979) a partir d'altres consideracions. La següent proposició descriu les característiques més importants d'aquest operador.

Proposició 5.1.1.

Sigui T una t -norma. L'operador $\wedge_T : [0,1][0,1] \times [0,1][0,1] \rightarrow [0,1][0,1]$ definit com

$$(\tau_1 \wedge_T \tau_2)(z) = \text{Sup}_{xy} \{ T(\tau_1(x), \tau_2(y)) / z = T(x,y) \}, \text{ per a tot } z \in [0,1],$$

cumpleix les següents propietats:

1. $\wedge_T$ és associatiu i commutatiu.
2. si $\tau_1(1)=1$, aleshores és $\tau_1 \wedge_T \tau_2 \geq \tau_2$,
3. $\phi_T \wedge_T \tau = \tau$, per a qualsevol τ
4. $\phi_F \wedge_T \tau = \phi_F$, per a qualsevol τ
5. $(\tau_1 \wedge_T \tau_2)^{-1}(1) = T(\tau_1^{-1}(1), \tau_2^{-1}(1))$

Demostració:

1. $(\tau_1 \wedge_T (\tau_2 \wedge_T \tau_3))(z) = \text{Sup}_{xy} \{ T(\tau_1(x), (\tau_2 \wedge_T \tau_3)(y)) / z = T(x,y) \} =$
 $= \text{Sup}_{xy} \{ T(\tau_1(x), \text{Sup}_{vw} \{ T(\tau_2(v), \tau_3(w)) / y = T(v,w) \}) / z = T(x,y) \} =$
 $= \text{Sup}_{xvw} \{ T(\tau_1(x), T(\tau_2(v), \tau_3(w))) / z = T(x, T(v,w)) \} =$
 $= \text{Sup}_{xvw} \{ T(T(\tau_1(x), \tau_2(v)), \tau_3(w)) / z = T(T(x,v), w) \} =$
 $= \text{Sup}_{yw} \{ T(\text{Sup}_{xv} \{ T(\tau_1(x), \tau_2(v)) / y = T(x,v) \}, \tau_3(w)) / z = T(y,w) \} =$
 $= \text{Sup}_{yw} \{ T((\tau_1 \wedge_T \tau_2)(y), \tau_3(w)) / z = T(y,w) \} = ((\tau_1 \wedge_T \tau_2) \wedge_T \tau_3)(z).$

La commutativitat és immediata.

2. si $\tau_1(1)=1$, aleshores $(\tau_1 \wedge_T \tau_2)(z) = \text{Sup}_{xy} \{ T(\tau_1(x), \tau_2(y)) / z = T(x,y) \} \geq$
 $\geq T(\tau_1(1), \tau_2(z)) = \tau_2(z)$
3. $(\phi_T \wedge_T \tau)(z) = \text{Sup}_{xy} \{ T(\phi_T(x), \tau(y)) / z = T(x,y) \} = T(\phi_T(1), \tau(z)) = \tau(z)$
4. Sigui $k \in \tau^{-1}(1)$. Del fet que $0 = T(0,k)$ es segueix que
 $(\phi_F \wedge_T \tau)(0) = \text{Sup}_{xy} \{ T(\phi_F(x), \tau(y)) / z = T(x,y) \} = T(\phi_F(0), \tau(k)) = 1$, i que
 $(\phi_F \wedge_T \tau)(z) = \text{Sup}_{xy} \{ T(\phi_F(x), \tau(y)) / z = T(x,y) \} =$
 $= \text{Sup}_{xy} \{ T(0, \tau(y)) / z = T(x,y) \} = 0$ per a tot $z \neq 0$, o sigui $(\phi_F \wedge_T \tau) = \phi_F$

5. $\text{Sup}_{xy} \{ T(\tau_1(x), \tau_2(y)) / z = T(x, y) \} = 1$ si i només si existeixen x_0, y_0 tals que $z = T(x_0, y_0)$, $\tau_1(x_0) = 1$ i $\tau_2(y_0) = 1$. O sigui $(\tau_1 \wedge_T \tau_2)(z) = 1$ si i només si existeixen $x_0 \in \tau_1^{-1}(1)$ i $y_0 \in \tau_2^{-1}(1)$ tals que $z = T(x_0, y_0)$. ♦

5.2. Disjunció.

Considerem ara el següent esquema d'inferència, on la premissa està formada per la disjunció de dos proposicions:

Si (X és A) o (Y és B) aleshores (Z és C)

$E = [(X \text{ és } A'), (Y \text{ és } B')]$

$(Z \text{ és } C' = \text{CRI}(T(A', B'), I(S(A, B), C)))$

Anàlogament al cas anterior, segons la proposició 6.2, podem expressar C' com $M_I[\tau_{A/A'} \vee_T \tau_{B/B'}] \circ C$, on l'operació $\vee_T$ entre qualificacions ve definida per

$$\vee_T : [0, 1]^{[0, 1]} \times [0, 1]^{[0, 1]} \rightarrow [0, 1]^{[0, 1]}$$

$$(\tau_1 \vee_T \tau_2)(z) =_{\text{DEF}} \text{Sup}_{xy} \{ T(\tau_1(x), \tau_2(y)) / z = S(x, y) \}, \text{ per a tot } z \in [0, 1]$$

on T és la mateixa t-norma que abans, i S és la t-conorma que modelitza la disjunció en l'àlgebra de conjunts difusos. De forma anàloga també, aquesta definició permet expressar l'anterior esquema així:

Si (X és A) o (Y és B) aleshores (Z és C)

(X és A) és τ_1 , (Y és B) és τ_2

$(Z \text{ és } C) \text{ és } \tau_3 = M_I(\tau_1 \vee_T \tau_2)$

Així doncs, prenent $\vee_T$ com a operador disjunció, assegurem que el seu comportament respecte a l'inferència serà correcta. La següent proposició descriu les característiques més importants d'aquest operador.

Proposició 5.2.1.

Sigui T una t -norma, i S una t -conorma.

L'operador $\vee_T : [0,1][0,1] \times [0,1][0,1] \rightarrow [0,1][0,1]$ definit com

$$(\tau_1 \vee_T \tau_2)(z) = \text{Sup}_{xy} \{ T(\tau_1(x), \tau_2(y)) / z = S(x,y) \}, \text{ per a tot } z \in [0,1]$$

compleix les següents propietats:

1. $\vee_T$ és associatiu i commutatiu.
2. si $\tau_1(0) = 1$, aleshores és $\tau_1 \vee_T \tau_2 \geq \tau_2$,
3. $\phi_F \vee_T \tau = \tau$, per a qualsevol τ
4. $\phi_T \vee_T \tau = \phi_T$, per a qualsevol τ
5. $(\tau_1 \vee_T \tau_2)^{-1}(1) = S(\tau_1^{-1}(1), \tau_2^{-1}(1))$

Demostració:

1. $(\tau_1 \vee_T (\tau_2 \vee_T \tau_3))(z) = \text{Sup}_{xy} \{ T(\tau_1(x), (\tau_2 \vee_T \tau_3)(y)) / z = S(x,y) \} =$
 $= \text{Sup}_{xy} \{ T(\tau_1(x), \text{Sup}_{vw} \{ T(\tau_2(v), \tau_3(w)) / y = S(v,w) \}) / z = S(x,y) \} =$
 $= \text{Sup}_{xvw} \{ T(\tau_1(x), T(\tau_2(v), \tau_3(w))) / z = S(x, S(v,w)) \} =$
 $= \text{Sup}_{xvw} \{ T(T(\tau_1(x), \tau_2(v)), \tau_3(w)) / z = S(S(x,v), w) \} =$
 $= \text{Sup}_{yw} \{ T(\text{Sup}_{xv} \{ T(\tau_1(x), \tau_2(v)) / y = S(x,v) \}, \tau_3(w)) / z = S(y,w) \} =$
 $= \text{Sup}_{yw} \{ T((\tau_1 \vee_T \tau_2)(y), \tau_3(w)) / z = T(y,w) \} = ((\tau_1 \vee_T \tau_2) \vee_T \tau_3)(z).$

La commutativitat és immediata.

2. si $\tau_1(0)=1$, aleshores $(\tau_1 \vee_T \tau_2)(z) = \text{Sup}_{xy} [T(\tau_1(x), \tau_2(y)) / z = S(x,y)] \geq$
 $\geq T(\tau_1(0), \tau_2(z)) = \tau_2(z)$
3. $(\phi_F \vee_T \tau)(z) = \text{Sup}_{xy} \{ T(\phi_T(x), \tau(y)) / z = S(x,y) \} = T(\phi_T(0), \tau(z)) = \tau(z)$
4. Sigui $k \in \tau^{-1}(1)$. Del fet que $1 = S(1,k)$ se segueix que per a $z < 1$
 $(\phi_T \vee_T \tau)(z) = \text{Sup}_{xy} \{ T(\phi_T(x), \tau(y)) / z = S(x,y) \} =$
 $= \text{Sup}_{xy} \{ T(0, \tau(y)) / z = S(x,y) \} = 0$, per a tot $z < 1$, i que $(\phi_T \vee_T \tau)(1) =$
 $= \text{Sup}_{xy} \{ T(\phi_T(x), \tau(y)) / 1 = S(x,y) \} \geq T(\phi_T(1), \tau(k)) = 1$, o sigui $(\phi_T \vee_T \tau) =$
 $= \phi_T$
5. $\text{Sup}_{xy} \{ T(\tau_1(x), \tau_2(y)) / z = S(x,y) \} = 1$ si i només si existeixen x_0, y_0 tals que

$z = S(x_0, y_0)$, $\tau_1(x_0) = 1$ i $\tau_2(y_0) = 1$. O sigui $(\tau_1 \wedge_T \tau_2)(z) = 1$ si i només si existeixen x_0 i y_0 de $\tau_1^{-1}(1)$ i $\tau_2^{-1}(1)$ respectivament tals que $z=S(x_0, y_0)$. ♦

5.3. Implicació.

Altres cop, de forma anàloga als operadors conjunció i disjunció, considerem el següent esquema d'inferència, on la premissa està formada a la vegada per un condicional:

Si [Si (X és A) aleshores (Y és B)] aleshores (Z és C)

$E = [(X \text{ és } A'), (Y \text{ és } B')]$

$$(Z \text{ és } C' = \text{CRI}(T(A', B'), I(I(A, B), C)))$$

Per raons idèntiques als dos casos anteriors, podem expressar C' com

$$C' = M_I[\tau_{A/A'} \rightarrow_I \tau_{B/B'}] \circ C,$$

on donada una implicació I , l'operació $\rightarrow_I$ entre qualificacions ve definida per

$$\rightarrow_I : [0,1]^{[0,1]} \times [0,1]^{[0,1]} \rightarrow [0,1]^{[0,1]}$$

$$(\tau_1 \rightarrow_I \tau_2)(z) = \sup_{xy} \{ T(\tau_1(x), \tau_2(y)) / z = I(x, y) \}$$

Les propietats més destacables d'aquest operador venen donades en la següent proposició.

Proposició 5.3.1.

1. Si τ_2 és creixent, aleshores $\tau_1 \rightarrow_I \tau_2 \leq \tau_2$
2. Si $\tau_1(1) = 1$, aleshores $\tau_1 \rightarrow_I \tau_2 \geq \tau_2$
3. Si $\tau_1 \leq \tau'_1$, aleshores $\tau_1 \rightarrow_I \tau_2 \leq \tau'_1 \rightarrow_I \tau_2$
- Si $\tau_2 \leq \tau'_2$, aleshores $\tau_1 \rightarrow_I \tau_2 \leq \tau_1 \rightarrow_I \tau'_2$
4. $\tau_1 \rightarrow_I (\tau_2 \rightarrow_I \tau_3) = \tau_2 \rightarrow_I (\tau_1 \rightarrow_I \tau_3)$
5. $\phi_T \rightarrow_I \tau = \tau$, $\phi_F \rightarrow_I \tau = \phi_T$

Demostració:

$$(1) (\tau_1 \rightarrow_I \tau_2)(z) = \text{Sup}_{xy} \{ T(\tau_1(x), \tau_2(y)) / z = I(x,y) \} \leq \text{Sup}_{xy} \{ \tau_2(y) / z = I(x,y) \} \\ = (x=1, y=z) = \tau_2(z)$$

$$(2) (\tau_1 \rightarrow_I \tau_2)(z) = \text{Sup}_{xy} \{ T(\tau_1(x), \tau_2(y)) / z = I(x,y) \} \geq (x=1, y=z) \geq T(\tau_1(1), \tau_2(z)) \\ = \tau_2(z)$$

(3) immediat a partir de la monotonía de T.

$$(4) (\tau_1 \rightarrow_I (\tau_2 \rightarrow_I \tau_3))(z) = \text{Sup}_{xy} \{ T(\tau_1(x), (\tau_2 \rightarrow_I \tau_3)(y)) / z = I(x,y) \} = \\ = \text{Sup}_{xy} \{ T(\tau_1(x), \text{Sup}_{uw} \{ T(\tau_2(u), \tau_3(w)) / y = I(u,w) \}) / z = I(x,y) \} = \\ = \text{Sup}_{xuw} \{ T(\tau_1(x), T(\tau_2(u), \tau_3(w))) / z = I(x, I(u,w)) \} = \\ = \text{Sup}_{xuw} \{ T(\tau_2(u), T(\tau_1(x), \tau_3(w))) / z = I(u, I(x,w)) \} = \\ = \text{Sup}_{uy} \{ T(\tau_2(u), \text{Sup}_{xw} \{ T(\tau_1(x), \tau_3(w)) / y = I(x,w) \}) / z = I(u,y) \} = \\ = \text{Sup}_{uy} \{ T(\tau_2(u), (\tau_1 \rightarrow_I \tau_3)(y)) / z = I(u,y) \} = (\tau_2 \rightarrow_I (\tau_1 \rightarrow_I \tau_3))(z)$$

$$(5) (\phi_T \rightarrow_I \tau)(z) = \text{Sup}_{xy} \{ T(\phi_T(x), \tau(y)) / z = I(x,y) \} = T(\phi_T(1), \tau(z)) = \tau(z) \\ \text{Sigui } z < 1. \text{ Aleshores tenim } (\phi_F \rightarrow_I \tau)(z) = \text{Sup}_{xy} \{ T(\phi_F(x), \tau(y)) / z = I(x,y) \} \\ \leq \text{Sup}_{xy} \{ T(\phi_F(x), \tau(y)) / x > 0 \} = \text{Sup}_y \{ T(0, \tau(y)) \} = 0. \\ \text{Si és } z = 1, \text{ aleshores és } (\phi_F \rightarrow_I \tau)(1) = \text{Sup}_{xy} \{ T(\phi_F(x), \tau(y)) / 1 = I(x,y) \} \geq \\ \geq \text{Sup}_y \{ T(\phi_T(0), \tau(y)) \} = \text{Sup}_y \{ \tau(y) \} = 1 \\ \text{Resumint, } (\phi_F \rightarrow_I \tau)(z) = 0, \text{ si } z < 1,; (\phi_F \rightarrow_I \tau)(1) = 1, \text{ o sigui és} \\ \phi_F \rightarrow_I \tau = \phi_T, \text{ tal com es volia demostrar } \spadesuit$$

5.4. Negació.

Donat un conjunt evidencial $E = [(X \text{ és } A'), \dots]$, i uns condicionals del tipus "Si (X és A) aleshores (Y és B)" i "Si (X no és A) aleshores (Z és C)" podem plantejar-nos les següents inferències:

Si (X és A) aleshores (Y és B)

Si (X no és A) aleshores (Z és C)

(X és A) és h

(X no és A) és h'

(Y és B) és $M_I(h)$

(Z és C) és $M_I(h')$

on $h = \tau_{A/A}$ i $h' = \tau_{\neg A/A}$.

Sembla natural definir l'operador negació entre qualificacions de manera que h' sigui la negada de h , i viceversa. La proposició 3.4 prova que la relació entre aquestes dues funcions és la següent: $h' = h \circ n$, on n és la funció de negació forta que modelitza la complementació en l'àlgebra suport dels conjunts difusos (usualment $n(x)=1-x$). Així doncs, tenim la següent definició:

Definició 5.4.1.

Donada una negació forta n , definim l'operador $N_{1n}: [0,1]^{[0,1]} \rightarrow [0,1]^{[0,1]}$ així

$$N_{1n}(\tau) = \tau \circ n$$

Amb aquesta definició, les proposicions següents són equivalents

$$"(X \text{ és } A) \text{ és } \tau" \Leftrightarrow "(X \text{ no és } A) \text{ és } N_{1n}(\tau)"$$

Les propietats més destacables d'aquest operador negació venen descrites en la següent proposició.

Proposició 5.4.2.

L'operador N_{1n} verifica les següents propietats:

1) N_{1n} és involutiu, és a dir, $N_{1n}(N_{1n}(\tau)) = \tau$, per a tot $\tau \in [0,1]^{[0,1]}$

2) Si $\tau \leq \tau'$, aleshores $N_{1n}(\tau) \leq N_{1n}(\tau')$

4) Si $\tau \geq j$, aleshores $N_{1n}(\tau) \geq n$

Si $\tau \leq j$, aleshores $N_{1n}(\tau) \leq n$

(en particular, $N_{1n}(j) = n$)

Demostració: És immediata a partir de la definició de l'operador N_{1n} . ♦

És important remarcar que, quan la t-conorma S és dual de la t-norma T respecte a la negació n (i.e. $S = \text{noTo}(nxn)$), aleshores l'operador $\vee_T$ és també dual del operador $\wedge_T$ respecte a l'operador N_{1n} . En efecte, la següent proposició ens ho demostra.

Proposició 5.4.3.(dualitat)

Si S i T són duals respecte a n , aleshores es verifica

$$\tau_1 \vee_T \tau_2 = N_{1n} (N_{1n}(\tau_1) \wedge_T N_{1n}(\tau_2))$$

Demostració:

$$\begin{aligned} (\tau_1 \vee_T \tau_2)(z) &= \text{Sup}_{xy} \{ T(\tau_1(x), \tau_2(y)) / z = (x,y) \} = \\ &= \text{Sup}_{xy} \{ T(N_{1n}(\tau_1)(nx), N_{1n}(\tau_2)(ny)) / nz = T(nx, ny) \} = \\ &= (N_{1n}(\tau_1) \wedge_T N_{1n}(\tau_2))(nz) = [N_{1n}(N_{1n}(\tau_1) \wedge_T N_{1n}(\tau_2))](z) \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

5.5. Altres tipus de transformacions.

5.5.1. Complementació.

Donat un conjunt evidencial E , i un enunciat $p = "X \text{ és } A"$, tenim la qualificació de p respecte a E , $QV(p/E) = \tau_{A/E}$, i per tant podem parlar de la proposició " $(X \text{ és } A) \text{ és } QV(p/E)$ " com un enunciat vàlid en el sentit de que es pot considerar com un altre referencial (vegi's apartat 3.3). Aleshores pot interessar saber quina és la qualificació h que fa vàlida a la proposició " $(X \text{ és } A) \text{ no és } h$ ", o el que és el mateix " $(X \text{ és } A) \text{ és } \neg h$ ", on $\neg$ denota complementació, es a dir, $\neg h = n \circ h$, on n és una negació forta. Per tant, és fàcil veure que prenent la següent definició:

Definició 5.5.1.1.

Donada una negació forta n , definim l'operador $N_{2n}: [0,1]^{[0,1]} \rightarrow [0,1]^{[0,1]}$ així

$$N_{2n}(\tau) = n \circ \tau$$

fem equivalents les següents proposicions:

$$"(X \text{ és } A) \text{ és } \tau" \Leftrightarrow "(X \text{ és } A) \text{ no és } N_{2n}(\tau)"$$

Les característiques del operador N_{2n} es resumeixen seguidament.

Proposició 5.5.1.2.

Segui n una funció de negació forta a $[0,1]$. Aleshores l'operador N_{2n} es verifica les següents condicions:

1. N_{2n} és involutiu

$$2. \text{ Si } \tau \leq \tau', N_{1n}(\tau) \geq N_{2n}(\tau')$$

$$3. \text{ Si } \tau \leq j, N_{2n}(\tau) \geq n$$

$$\text{ Si } \tau \geq j, N_{2n}(\tau) \leq n$$

$$(\text{ en particular } N_{2n}(j) = n)$$

Demostració: Immediata a partir de la definició. ♦

5.5.2. Negació-complementació.

Anàlogament al subapartat anterior, donada una proposició "(X és A) és τ " on $\tau = QV("X \text{ és } A"/E)$ per a un cert conjunt evidencial E , ens interessa saber quina és la qualificació h que fa vàlida la proposició "(X no és A) no és h ". És fàcil veure que obtindrem h composant els dos anteriors operadors N_{1n} i N_{2n} sobre τ , és a dir, $h = N_{1n}(N_{2n}(\tau)) = N_{2n}(N_{1n}(\tau)) = n \circ \tau \circ n$. Tenint això en compte, podem passar a considerar un nou operador, que l'anomenarem de negació-complementació:

Definició 5.5.2.1.

Donada una negació forta n , definim l'operador $N_{3n}: [0,1]^{[0,1]} \rightarrow [0,1]^{[0,1]}$ així

$$N_{3n}(\tau) = n \circ \tau \circ n$$

Les característiques més notables d'aquest operador són les següents:

Proposició 5.5.2.2.

N_{3n} verifica les següents propietats:

$$1. N_{3n} \text{ és involutiva}$$

$$2. \text{ Si } \tau \leq \tau', N_{3n}(\tau) \geq N_{3n}(\tau')$$

$$3. \text{ Si } \tau = j, N_{3n}(\tau) = j$$

$$\text{ Si } \tau = 1-j, N_{3n}(\tau) = 1-j$$

$$4. \text{ Si } \tau \leq j, N_{2n}(\tau) \geq j$$

$$\text{ Si } \tau \geq j, N_{2n}(\tau) \leq j$$

Demostració: Immediata. ♦

En resum hem vist tres operadors N_{1n} , N_{2n} i N_{3n} que transformen qualificacions per tal de poder assegurar que les següents proposicions siguin semànticament equivalents:

$$\begin{aligned} "(X \text{ és } A) \text{ és } \tau" &\Leftrightarrow "(X \text{ no és } A) \text{ és } N_{1n}(\tau)" \Leftrightarrow "(X \text{ és } A) \text{ no és } N_{2n}(\tau)" \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow "(X \text{ no és } A) \text{ no és } N_{3n}(\tau)". \end{aligned}$$

6. Inferència amb regles qualificades. Adaptació de la Regla Composicional d'Inferència.

Així com hem vist en la secció 3 d'aquest capítol que les proposicions atòmiques són susceptibles de ser qualificades, res no impedeix associar qualificacions veritatives a proposicions condicionals per tal de reflectir el seu grau de certesa. D'altra banda, el fet que les M_I associades a R-implicacions siguin operadors clausura porta com a conseqüència que en encadenaments de regles sense qualificar (o equivalentment, qualificades amb la identitat j), la qualificació obtinguda a la primera inferència ja roman estable en la resta d'inferències. Aquest comportament té alguns inconvenients, ja que en cas d'un encadenament d'inferències a partir de fets no totalment certs, a vegades pot ser desitjable arribar a un nivell d'indecisió. D'altra banda, aquesta estabilitat de la inferència no és d'estranyar, ja que el fet de que el condicional no portés cap qualificació associada, pot ser ara interpretat com que el condicional fos en realitat qualificat per la funció identitat j , que generalment és la representació del valor de veritat difús "cert".

Així doncs, quan un condicional del tipus "Si (X és A) aleshores (Y és B)" ve qualificat per una etiqueta μ , podem considerar esquemes d'inferència tal com

$$[\text{ Si } (X \text{ és } A) \text{ aleshores } (Y \text{ és } B)] \text{ és } \mu$$

$$(X \text{ és } A')$$

$$(Y \text{ és } B^*)$$

on, aplicant la R.C.I. i considerant que μ modifica la distribució de possibilitat associada al condicional, l'expressió de la distribució B^* ve donada per

$$B^*(v) = CRI(A', \mu(I(A,B)))(v) = \sup_u \{ m_I(A'(u), \mu(I(A(u), B(v)))) \}$$

Anàlogament al cas no qualificat, podem donar la següent proposició, que justifica l'anterior esquema d'inferència.

Proposició 6.1.

Siguin A i A' distribucions de possibilitat sobre un univers U , i B una distribució sobre un univers V . Aleshores B^ és la distribució més específica tal que $\mu(I(A,B)) \leq I(A', B^*)$, o sigui*

$$B^* = \min \{ C \in [0,1]^V \mid \mu(I(A,B)) \leq I(A', C) \},$$

Demostració:

Cal remarcar d'entrada que, per qualsevols A , A' i B , el conjunt $\{ C \in [0,1]^V \mid \mu(I(A,B)) \leq I(A', C) \}$ no és buit, ja que la distribució idènticament igual a 1 pertany sempre al conjunt en qüestió. Sigui doncs $C \in [0,1]^V$ tal que $\mu(I(A,B)) \leq I(A', C)$. Aleshores necessàriament ha de ser $m_I(A'(u), \mu(I(A(u), B(v)))) \leq C(v)$, per a tot u d' U i v de V . Per tant, prenent suprem respecte a les " u " tindrem

$$B^*(v) = \sup_u \{ m_I(A'(u), \mu(I(A(u), B(v)))) \} \leq C(v),$$

tal com es volia demostrar. Per últim, cal veure que $\mu(I(A,B)) \leq I(A', B^*)$, però això altre cop és immediat a partir del lema 3.4 del capítol 1. ♦

Així doncs, aquesta proposició ens diu que, donat A' , $I(A', B^*)$ és la distribució condicional més específica que preserva la distribució condicional modificada $\mu(I(A,B))$ entre A i B .

La següent proposició ens dóna un parell de propietats interessants de la inferència amb regles qualificades. La primera ens diu que la distribució de possibilitat inferida no serà mai més específica que la del conseqüent de la regla modificada per la funció que qualifica a la regla, en cas de que aquesta sigui una funció creixent. La segona es refereix a la monotonicitat (respecte a l'ordre puntual) de la inferència respecte a les qualificacions de les regles.

Proposició 6.2.

Es verifiquen les següents dues propietats:

(1) Si μ és creixent, $CRI(A', \mu(I(A, B))) \geq \mu(B)$ per a qualsevol A' .

(2) Si $\mu_1 \leq \mu_2$, $CRI(A', \mu_1(I(A, B))) \leq CRI(A', \mu_2(I(A, B)))$.

Demostració:

(1) Per la pròpia definició és $CRI(A', \mu(I(A, B)))(v) = \sup_u \{ m_I(A'(u), \mu(I(A(u), B(v)))) \}$, i, atès que $I(x, y) \geq y$ i m_I és creixent en la segona variable, tenim $\sup_u \{ m_I(A'(u), \mu(I(A(u), B(v)))) \} \geq \sup_u \{ m_I(A'(u), \mu(B(v))) \} = \mu(B(v))$.

(2) La propietat és conseqüència immediata de la creixença en la segona variable de les funcions m_I . ♦

Una conseqüència directa d'aquesta proposició és el següent corol·lari:

Corol·lari 6.3.

(1) Si $\mu \geq j$, aleshores $CRI(A', \mu(I(A, B))) \geq B$

(2) Si $\mu \leq j$, aleshores $CRI(A', \mu(I(A, B))) \leq B$, per a qualsevol $A' \leq A$

7. Funcions de Raonament Directe Qualificat.

De forma anàloga a la secció 4, s'introdueixen a continuació les anomenades Funcions de Raonament Directe Qualificat (F.R.D.Q.) per tal de donar una expressió de la Regla Composicional d'Inferència en funció de qualificacions veritatives, quan les pròpies regles vénen qualificades. Com a principal resultat d'aquesta secció remarcuem que, en el marc de la lògica difusa, les funcions F.R.D.Q., per les seves propietats que veurem al llarg d'aquesta secció, poden ser considerades com a funcions generadores de Modus Ponens respecte a l'operador implicació entre qualificacions veritatives introduït a la secció 4.3, retrobant, al igual que es feia en primer capítol en el marc de les lògiques multivaluades, la formulació general que de la regla del Modus Ponens es proposava a la introducció d'aquesta memòria.

Comencem doncs amb la següent definició.

Definició 7.1.

Sigui I una funció d'implicació, i m_I la funció generadora de Modus Ponens associada a I . La Funció de Raonament Directa Qualificat QM_I associada a I és la funció definida per:

$$QM_I: [0,1][0,1] \times [0,1][0,1] \rightarrow [0,1][0,1]$$

$$(QM_I(\tau, \mu))(y) = \sup_x \{ m_I(\tau(x), \mu(I(x, y))) \}$$

Observi's que si μ és la identitat, la funció de raonament directa qualificat QM_I coincideix amb la funció de raonament directa M_I , és a dir, $QM_I(\tau, j) = M_I(\tau)$.

Teorema 7.2.

Sigui QM_I la Funció de Raonament Directa Qualificat associada a la funció d'implicació I . Sigui A i A' distribucions de possibilitat en l'univers U , B una distribució en l'univers V , i $\mu(I(A, B))$ la distribució condicional entre A i B , on μ és una qualificació. Aleshores tenim la següent igualtat:

$$CRI(A', \mu(I(A, B))) = QM_I(\tau_{A/A'}, \mu) \circ B$$

Demostració: anàloga al teorema 4.2 d'aquest capítol. ♦

Teorema 7.3.

Donades les qualificacions τ i μ , $QM_I(\tau, \mu)$ és la menor funció h que verifica

$$\mu \circ I \leq I \circ (\tau \times h),$$

és a dir, $QM_I(\tau, \mu) = \inf \{ h \mid \mu \circ I \leq I \circ (\tau \times h) \}$.

Demostració: vegi's teorema 4.3. ♦

Proposició 7.4.

Les funcions de raonament directe qualificat verifiquen les següents propietats:

- (1) QM_I és creixent respecte a les dues variables
- (2) $QM_I(\tau, \mu) \geq \mu$, si μ és creixent i $\tau^1(1) \neq \emptyset$
- (3) $QM_I(\tau, \mu) \geq \mu$, si $\tau \geq j$

(4) Si $\tau(1) = 1$, aleshores $QM_I(\tau, \mu) \geq \mu$

(5) Si I és contínua per la dreta respecte a la segona variable, aleshores

$$QM_I(\tau, \mu) \leq \mu \text{ si i només si } \mu \circ I \leq I \circ (\tau \times \mu)$$

(6) Si I és contínua per la dreta respecte a la segona variable, aleshores

$$QM_I(\tau, \mu) \leq \tau \text{ si i només si } \mu \circ I \leq I \circ (\tau \times \tau)$$

(7) $QM_I(\tau, \mu)(y) \geq m_I(\tau(0), \mu(1))$, per a tot $y \in [0, 1]$

Demostració:

(1) directa a partir de que m_I és creixent respecte a les dues variables.

(2) Atés que $\tau^{-1}(1) \neq \emptyset$, sigui k tal que $\tau(k) = 1$. El fet que μ sigui creixent fa que es verifiqui $\mu(I(x, y)) \geq \mu(y)$, i per tant, que poguem escriure:

$$QM_I(\tau, \mu)(y) = \sup_x \{ m_I(\tau(x), \mu(I(x, y))) \} \geq m_I(1, \mu(I(k, y))) = \mu(I(k, y)) \geq \mu(y).$$

(3) Si $\tau \geq j$, aleshores per la monotonia de m_I tenim:

$$QM_I(\tau, \mu)(y) = \sup_x \{ m_I(\tau(x), \mu(I(x, y))) \} \geq \sup_x \{ m_I(x, \mu(I(x, y))) \} \geq m_I(1, \mu(I(1, y))) = \mu(y)$$

(4) Si $\tau(1) = 1$, aleshores tenim:

$$QM_I(\tau, \mu)(y) = \sup_x \{ m_I(\tau(x), \mu(I(x, y))) \} \geq m_I(\tau(1), \mu(I(1, y))) = m_I(1, \mu(y)) = \mu(y)$$

(5) Per la definició de QM_I , serà $QM_I(\tau, \mu) \leq \mu$ si i només si $\sup_x \{ m_I(\tau(x), \mu(I(x, y))) \} \leq \mu(y)$ per a tot y , és a dir, si i només si $m_I(\tau(x), \mu(I(x, y))) \leq \mu(y)$. Finalment, si I és contínua per la dreta respecte a la segona variable, segons el lema 3.4 del capítol 1, serà $m_I(\tau(x), \mu(I(x, y))) \leq \mu(y)$ si i només si $\mu(I(x, y)) \leq I(\tau(x), \mu(y))$, tal com es volia demostrar.

(6) Demostració anàloga a l'anterior, canviant τ per μ a la part dreta de la desigualtat.

(7) $QM_I(\tau, \mu)(y) = \sup_x \{ m_I(\tau(x), \mu(I(x, y))) \} \geq m_I(\tau(0), \mu(I(0, y))) = m_I(\tau(0), \mu(1))$. ♦

Com a conseqüències immediates d'aquestes propietats tenim les del següent corol·lari:

Corol·lari 7.5:

(1) Si $\mu \geq j$, aleshores $QM_I(\tau, \mu) \geq M_I(\tau)$, i en particular,

$$QM_I(\tau, \mu) \geq j, \text{ si } \tau^{-1}(1) \neq \emptyset$$

(2) Si $\mu \leq j$, aleshores $QM_I(\tau, \mu) \leq M_I(\tau)$, i en particular,
 $QM_I(\tau, \mu) \leq j$, si $\tau \leq j$

Per últim, anem a veure que, donada una funció d'implicació I , la funció de raonament directe QM_I es pot considerar com a una funció geneadora de Modus Ponens per a l'operador $\rightarrow_I$ si la relació d'ordre parcial que considerem en el conjunt de qualificacions veritatives és el donat per l'invers del ordre puntual, és a dir, l'ordre $\leq_e$ definit com

$$\tau_1 \leq_e \tau_2 \text{ si, i només si, } \tau_1 \geq \tau_2$$

que dona la idea de que si és $\tau_1 \leq_e \tau_2$, aleshores τ_1 és una qualificació menys específica que τ_2 . Així, el paper que jugaven les funcions m_I en el marc d'una lògica funcional valorada a $[0,1]$, el juguen aquí les funcions QM_I en el marc de la lògica difusa, valorada a $[0,1]^{[0,1]}$. Tot això queda demostrat en el següent teorema.

Teorema 7.6

Sigui I una funció d'implicació. Aleshores la funció de raonament directe qualificat QM_I compleix les següents propietats:

$$QMP1) \quad QM_I(\tau_1, \tau_1 \rightarrow_I \tau_2) \leq_e \tau_2$$

$$QMP2) \quad QM_I(\phi_T, \mu) = \mu, \text{ per tota qualificació } \mu.$$

$$QMP3) \quad \text{Si } \mu(1) = 1, \text{ aleshores } QM_I(\phi_F, \mu) = \phi_U$$

$$QMP4) \quad \text{Si } \tau_1 \leq_e \tau'_1, \text{ aleshores } QM_I(\tau_1, \tau_2) \leq_e QM_I(\tau'_1, \tau_2)$$

$$\text{Si } \tau_2 \leq_e \tau'_2, \text{ aleshores } QM_I(\tau_1, \tau_2) \leq_e QM_I(\tau_1, \tau'_2)$$

Demostració:

QMP1) Per la definició del operador $\rightarrow_I$ tenim

$$\begin{aligned} QM_I(\tau_1, \tau_1 \rightarrow_I \tau_2)(y) &= \sup_x \{ m_I(t(x), (\tau_1 \rightarrow_I \tau_2)(I(x,y))) \} = \\ &= \sup_x \{ m_I(t(x), \sup_{u,w} \{ T(\tau_1(u), \tau_2(w)) / I(x,y) = I(u,w) \}) \} \end{aligned}$$

i prenent $u=x$ i $w=y$ tenim finalment que

$$\begin{aligned} &\sup_x \{ m_I(t(x), \sup_{u,w} \{ T(\tau_1(u), \tau_2(w)) / I(x,y) = I(u,w) \}) \} \geq \\ &\geq \sup_x \{ m_I(t(x), T(\tau_1(x), \tau_2(y))) \} = m_I(1, T(1, \tau_2(y))) = \tau_2(y) \end{aligned}$$

QMP2) Per la definició de ϕ_T tenim: $QM_I(\phi_T, \mu)(y) = \sup_x \{ m_I(\phi_T(x), \mu(I(x, y))) \} = m_I(\phi_T(1), \mu(I(1, y))) = m_I(1, \mu(y)) = \mu(y)$.

QMP3) Per la definició de ϕ_F tenim: $QM_I(\phi_F, \mu)(y) = \sup_x \{ m_I(\phi_F(x), \mu(I(x, y))) \} = m_I(\phi_F(0), \mu(I(0, y))) = m_I(1, \mu(1)) = 1$, per a qualsevol y , és a dir $QM_I(\phi_T, \mu) = \phi_U$

QMP4): immediat a partir de la monotonia de les m_I . ♦

7.1. Funcions de Raonament Directe Qualificat amb R-implicacions. Operadors Conseqüència.

Quan la funció d'implicació emprada en la Funció de Raonament Directe Qualificat QM_I és una R-implicació, aleshores tenim les següents propietats addicionals a les descrites anteriorment 7.4 i a 7.5.

Proposició 7.1.1.

Sigui I una R-implicació i μ una qualificació tal que $\mu(1) = 1$. Aleshores es satisfan les següents propietats:

$$(1) \quad QM_I(\tau, \mu) \geq \tau,$$

$$(2) \quad \text{Si } QM_I(\tau, \mu) = \tau, \text{ aleshores } \tau \text{ és creixent,}$$

Demostració:

(1) Degut a que les R-implicacions compleixen $I(y, y) = 1$ per a tot y , aleshores tenim $QM_I(\tau, \mu)(y) = \sup_x \{ m_I(\tau(x), \mu(I(x, y))) \} \geq m_I(\tau(y), \mu(I(y, y))) = m_I(\tau(y), \mu(1)) = m_I(\tau(y), 1) = \tau(y)$

(2) En efecte, atés que les R-implicacions són contínues per la dreta respecte a la segona variable, segons la proposició del apartat anterior és $QM_I(\tau, \mu) = \tau$ si i només si $\mu \circ I \leq I \circ (\tau \times \tau)$. Sigui $x \leq y$, aleshores tenim que $I(\tau(x), \tau(y)) \geq \mu(I(x, y)) = \mu(1) = 1$. Per tant és $I(\tau(x), \tau(y)) = 1$, però com que I és una R-implicació ha de ser necessàriament $\tau(x) \leq \tau(y)$. ♦

Anem a veure a continuació que, sota determinades condicions, per a una qualificació del condicional fixada, les funcions QM_I poden ser considerades operadors conseqüència en el sentit que s'hi poden considerar les funcions M_I en el apartat 4.1.

En efecte, donada una qualificació μ d'un condicional, considerem la funció $QM_{I-\mu}$, definida per

$$QM_{I-\mu}: [0,1][0,1] \rightarrow [0,1][0,1]$$

$$QM_{I-\mu}(\tau) = QM_I(\tau, \mu), \text{ per a tota } \tau \text{ de } [0,1][0,1]$$

Degut a la monotonia de QM_I , és fàcil comprovar que, per a qualsevol μ , es compleix la condició d'isotonia:

$$(CQ-1) \quad QM_{I-\mu}(\tau) \leq QM_{I-\mu}(\tau'), \text{ si } \tau \leq \tau'$$

La proposició anterior assegura la condició d'extensivitat, sempre que $\mu(1) = 1$:

$$(CQ-2) \quad QM_{I-\mu}(\tau) \geq \tau, \text{ per a qualsevol } \tau.$$

En canvi, la condició d'idempotència

$$(CQ-3) \quad QM_{I-\mu}^2 = QM_{I-\mu}$$

no es pot assegurar en general, sino només la desigualtat $QM_{I-\mu}^2 \geq QM_{I-\mu}$, en cas de que $\mu(1) = 1$. En efecte, si $\mu(1) = 1$, per una banda, és fàcil comprovar que també $QM_{I-\mu}(\tau)(1) = 1$, i per tant, per la condició d'extensivitat, és $QM_{I-\mu}^2 \geq QM_{I-\mu}$. Per l'altra banda, si I és la implicació residuada de la t-norma producte, és a dir, la definida per

$$I(x,y) = 1, \text{ si } x \leq y$$

$$I(x,y) = y/x, \text{ altrament}$$

és fàcil veure que si prenem la funció paramètrica $\mu_a(x) = \min(x/a, 1)$, on $0 < a < 1$, aleshores és $QM_{I-\mu_a}^2(j) = \mu_{a^2} \neq \mu_a = QM_{I-\mu_a}(j)$.

La següent proposició dóna unes condicions suficients sobre I i μ per tal de que es satisfaci la condició d'idempotència, i per tant també per a poder interpretar a les $QM_{I-\mu}$ com a operadors conseqüència generalitzats.

Proposició 7.1.2.

Sigui I la R-implicació generada per una t-norma T , és a dir, la funció definida per $I(x,y) = \sup\{c / T(x,c) \leq y\}$. Aleshores, $QM_{I-\mu}$ és un operador conseqüència si μ és una funció creixent, i es satisfà la següent desigualtat:

$$T(\mu(x), \mu(y)) \leq \mu(T(x,y))$$

Demostració:

Si μ és creixent, és $\mu(1) = 1$, i per tant valen (CQ-1), (CQ-2), i $QM_{I-\mu}^2 \geq QM_{I-\mu}$. Falta veure doncs que $QM_{I-\mu}^2 \leq QM_{I-\mu}$. En efecte, per la associativitat de T tenim

$$\begin{aligned} (QM_{I-\mu}(QM_{I-\mu}(\tau)))(y) &= \sup_x \{ T(QM_{I-\mu}(\tau)(x), \mu(I(x,y))) \} = \\ &= \sup_x \{ T(\sup_z \{ T(\tau(z), \mu(I(z,x))) \}, \mu(I(x,y))) \} = \\ &= \sup_x \{ \sup_z \{ T(T(\tau(z), \mu(I(z,x))), \mu(I(x,y))) \} \} = \\ &= \sup_{xz} \{ T(\tau(z), T(\mu(I(z,x)), \mu(I(x,y)))) \} = \\ &= \sup_z \{ T(\tau(z), \sup_x \{ T(\mu(I(z,x)), \mu(I(x,y))) \}) \} \end{aligned}$$

Si T compleix la desigualtat de l'enunciat de la proposició, aleshores serà

$$\begin{aligned} &\sup_z \{ T(\tau(z), \sup_x \{ T(\mu(I(z,x)), \mu(I(x,y))) \}) \} \leq \\ &\leq \sup_z \{ T(\tau(z), \sup_x \{ \mu(T(I(z,x), I(x,y))) \}) \}, \end{aligned}$$

i per l'anomenada T-transitivitat de les t-normes respecte a les R-implicacions que generen, i.e. $T(I(x,y), I(y,z)) \leq I(x,z)$, tenim

$$\begin{aligned} &\sup_z \{ T(\tau(z), \sup_x \{ \mu(T(I(z,x), I(x,y))) \}) \} \leq \\ &\leq \sup_z \{ T(\tau(z), \mu(I(z,y))) \} = QM_{I-\mu}(\tau)(y), \end{aligned}$$

o sigui, és $QM_{I-\mu}^2 \leq QM_{I-\mu}$ tal com es volia demostrar. ♦

7.2. Inferència qualificada i operació conjunció.

En aquest subapartat veurem que, quan la funció de implicació està definida per residuació del connectiu conjunció, la relació que hi havia entre el connectiu conjunció i la funció generadora de Modus Ponens en el marc de la lògica multivaluada a $[0,1]$, es retroba aquí sota unes condicions força generals. En efecte, tenim el següent teorema:

Teorema 7.2.1.

Sigui I una R-implicació, μ una qualificació creixent, i $\wedge_T$ l'operació conjunció entre qualificacions definida en l'apartat 5.1. Aleshores es verifica la següent igualtat:

$$QM_I(\tau, \mu) = \tau \wedge_T \mu$$

Demostració:

A partir de les definicions de $QM_I(\tau, \mu)$ i de $\tau \wedge_T \mu$, queda clar que el que s'ha de demostrar és la igualtat $\sup_x \{ T(\tau(x), \mu(I(x,y))) \} = \sup_{xz} \{ T(\tau(x), \mu(z)) / y = T(x,z) \}$ per a tot y de $[0,1]$. Aleshores tenim:

1) El fet que de $I(x,y) = z$ s'en dedueixi $T(x,z)=y$, implica que $I_y = \{ (x,z) / I(x,y) = z \} \subseteq T_y = \{ (x,z) / T(x,z) = y \}$, i per tant que $\text{Sup}_{xz} \{ T(\tau(x),\mu(z)) / z = I(x,y) \} \leq \text{Sup}_{xz} \{ T(\tau(x),\mu(z)) / y = T(x,y) \}$

2) Per altra banda de $T(x,z') = y$ s'en pot deduir $z' \leq I(x,y) = z$, és a dir, per a tot (x,z') de T_y , existeix (x,z) de I_y , amb $z \geq z'$, i per tant, si μ és creixent, tenim que $\text{Sup}_{xz} \{ T(\tau(x),\mu(z)) / z = I(x,y) \} \geq \text{Sup}_{xz} \{ T(\tau(x),\mu(z)) / y = T(x,y) \}$

Així doncs, queda demostrat el teorema. ♦

Per últim, observem que aquesta relació entre les Funcions de Raonament Directe qualificades i les operacions conjunció entre qualificacions permet donar de forma immediata una condició suficient per a la idempotència de la funció $QM_{I-\mu}$, i per tant també per a la seva condició d'operador conseqüència, en termes de la idempotència de la qualificació μ respecte a l'operació conjunció $\wedge_T$.

Proposició 7.2.2.

Sigui I la R-implicació generada per una t-norma T , i μ una funció creixent.

Aleshores, $\mu \wedge_T \mu = \mu$ és una condició suficient per a que $QM_{I-\mu}$ satisfaci (CQ-1), (CQ-2) i (CQ-3).

Demostració:

La única que no és evident és la CQ-3. Si μ és creixent, tenim:

$$QM_{I-\mu}^2(\tau) = (\tau \wedge_T \mu) \wedge_T \mu = \tau \wedge_T (\mu \wedge_T \mu) = \tau \wedge_T \mu = QM_{I-\mu}(\tau),$$

i per tant la condició CQ-3 es satisfeta. ♦

De fet, però, aquesta condició de suficiència és totalment equivalent a la donada en la proposició 7.1.2 de l'apartat anterior, tal com es demostra seguidament.

Proposició 7.2.3.

Sigui μ una funció creixent. Aleshores tenim la següent equivalència:

$$\mu \wedge_T \mu = \mu \text{ si i només si } T(\mu(x),\mu(y)) \leq \mu(T(x,y))$$

Demostració:

Si μ és creixent, i per tant $\mu(1) = 1$, aleshores és sempre $\mu \wedge_T \mu \geq \mu$. En efecte, $(\mu \wedge_T \mu)(z) = \text{Sup}_{xy} \{ T(\mu(x),\mu(y)) / z = T(x,y) \} \geq T(\mu(1),\mu(z)) = \mu(z)$. Així doncs, serà $\mu \wedge_T \mu \leq \mu$ si i només si $T(\mu(x),\mu(y)) \leq \mu(z)$ per a tot x,y tal que $z=T(x,y)$, o sigui, si i només si $T(\mu(x),\mu(y)) \leq \mu(T(x,y))$. ♦

Capítol 4: CÀLCUL AMB UN NOMBRE FINIT DE VALORS. GENERACIÓ D'OPERADORS.

1. Introducció: generació i el·licitació d'operadors.

El problema de trobar i seleccionar connectius lògics adients quan el conjunt de valors de veritat és l'interval $[0,1]$ ha sigut ampliament estudiat. A modus d'exemple podem citar (Alsina et al., 1983), (Esteve, 1981), (Garcia, Valverde; 1989), (Prade, 1985), (Schweizer, Sklar; 1983), (Trillas, 1979), (Trillas, Valverde; 1984) i (Valverde, 1982). Al contrari, s'ha estudiat relativament poc el problema quan el conjunt de valors de veritat és finit. Aquest és el cas més freqüent en el camp dels sistemes experts on, degut a la incompletesa, la informació suministrada per l'expert ve caracteritzada per ponderacions o qualificacions lingüístiques sobre la seva certesa, en nombre finit. En tal situació, la primera restricció que s'imposa al model de gestió de la incertesa que utilitzi el motor d'inferències del S.E. és la de treballar només amb un nombre finit de valors que representin als termes lingüístics del expert, preferiblement totalment ordenats segons el grau d'incertesa que expressin. Si, en segon lloc, s'hi afegeix el requeriment de funcionalitat, aleshores el marc lògic a on treballar és el d'una lògica multivaluada tal com el descrit en el capítol 2, on l'àlgebra de valors de veritat estaria formada per :

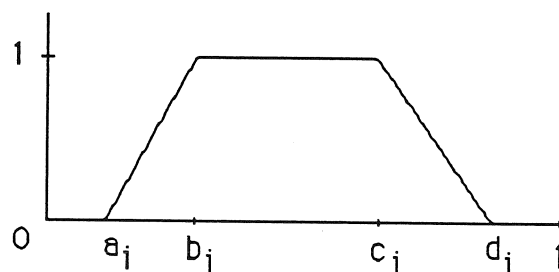
1) el conjunt de termes com a conjunt de valors de veritat

2) un conjunt finit d'operadors sobre els termes, que reflecteixin de la forma més acurada possible la manera en que l'expert combina i/o propaga la incertesa en els seus raonaments. Cada operador M sobre el conjunt de termes vindrà donat mitjançant una matriu, de la forma usual:

§4. Càlcul amb un nombre finit de valors. Generació d'operadors.

- sovint, als experts del domini els hi és difícil definir el significat dels termes lingüístics utilitzant una escala numèrica,
- és fàcil que diferents experts no es posin d'acord amb la representació d'alguns o tots els termes
- el procés d'aproximació, necessari per a mantenir el conjunt de termes tancat per les operacions, no assegura que els operadors resultants mantinguin totes les propietats exigides a les funcions utilitzades per a generar-los. Per exemple, a (Bonissone, 86) es dona el següent cas:

El conjunt de termes considerat és $L_1 = \{impossible, unlikely, maybe, likely, certain\}$, representats mitjançant intervals difusos de $[0,1]$ paramètrics (a_i, b_i, c_i, d_i) , amb una funció de pertinença trapezoidal tal com:



impossible : (0,0,0,0)
unlikely: (0,.01,.25,.35)
maybe: (.3,.4,.6,.7)
likely: (.65,.7,.99,1)
certain: (1,1,1,1)

Aleshores l'operador conjunció & sobre L_1 generat a partir de la t-norma producte, $T(x,y)=xy$, ve donat per la següent matriu:

&	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	1
2	0	1	1	2	2
3	0	1	2	3	3
4	0	1	2	3	4

on $0 \approx impossible$, $1 \approx unlikely$, $2 \approx maybe$, $3 \approx likely$, i $4 \approx certain$,

que no és associatiu ($1 \& (2 \& 2) \neq (1 \& 2) \& 2$), malgrat ser associativa la funció generadora.

3. La generació d'operadors com a un problema de satisfacció de restriccions.

Per tal de solventar els problemes acabats d'esmentar amb l'anterior enfoc, en aquest capítol es proposa i s'estudia un mètode alternatiu. L'idea central és la de tractar els termes lingüístics com a simples elements d'un conjunt d'etiquetes, sense associar-li's cap mena de representació numèrica, i aleshores elicitar els operadors lògics, en forma de matrius, directament sobre el conjunt de termes. L'únic requeriment a priori que s'els hi demana als termes és que estiguin ordenats, al menys parcialment. De totes maneres, en l'estudi que segueix l'ordre se'l suposarà total, ja que, si bé s'ha comentat la dificultat per part dels experts en coincidir en una representació numèrica dels termes, aquesta desapareix quan es tracta de posar-se d'acord en ordenar-los segons el grau de certesa que expressen.

Aleshores, a partir d'aquesta ordenació, per a cada tipus de connectiu lògic, es llisten un conjunt de propietats desitjables per a cada operador corresponent. Aquestes propietats actuaran com a restriccions sobre el conjunt inicial de possibles matrius solucions. D'aquesta forma, el problema de generar operadors que satisfacin un determinat conjunt de propietats es pot formular com un problema clàssic de satisfacció de restriccions.

L'algorisme doncs que es seguirà per tal d'elicitar un operador serà el següent:

- 1) considerar un conjunt de termes totalment ordenat.
- 2) considerar un conjunt de propietats a complir per l'operador.
- 3) obtenció de tots els possibles operadors com a totes les solucions d'un problema de satisfacció de restriccions
- 4) en cas de més d'una solució, establir un procés de selecció per tal d'arribar a la matriu que defineixi l'operador.

3.1. Problemes de satisfacció de restriccions.

El problema de satisfacció de restriccions, que es troba a moltes àrees de la I.A. com són l'etiquetatge de grafs, colorejat, etc., pot ser formulat en els següents termes.

- Sigui $V = \{ V_1, \dots, V_n \}$ un conjunt de variables.
- Sigui $D = \{ D_1, \dots, D_n \}$ el conjunt dels corresponents dominis discrets i finits (en general $D_i \neq D_j$, si $i \neq j$).
- Sigui $C = \{ C_k / 1 \leq k \leq m \}$ un conjunt de restriccions. Aquestes restriccions expressen la relació que ha d'existir entre les diferents variables per tal de que els seus valors siguin compatibles.

El problema consisteix en trobar una assignació de valors $\{ V_1/v_1, \dots, V_n/v_n \}$ tal que per a cada $1 \leq k \leq m$, C_k es satisfaci. Aleshores, pot interessar trobar totes les solucions o només una, o trobar el nombre total de solucions o bé saber si només n'hi ha alguna. La forma més senzilla de solucionar el problema és mitjançant un algorisme de cerca amb backtracking cronològic, que a trets generals es descriu a continuació. Aquests algorismes necessiten una pila per tenir en compte quines variables han sigut assignades.

1) *Inicialització:*

A cada variable V_i se li assigna el valor "indefinit".

La pila és buida

2) *Selecció d'una variable:*

Es selecciona una variable que necessita ser testejada com a variable actual, es marquen tots els seus valors com a no testejats, i es posa a la pila.

Si no es troba cap variable, anar al pas 5.

3) *Selecció d'un valor:*

Es selecciona un valor no testejat per a la variable actual, se l'hi assigna a la variable, i es marca el valor com a testejat.

Si no es pot seleccionar cap valor, anar al pas 6.

4) *Test:*

Es comproven totes les restriccions amb relació amb aquesta variable.

Si se satisfan, anar al pas 2; altrament, anar al pas 3.

5) *Solució:*

L'assignació de valors actual és una solució.

Si no es volen més solucions, acabar; altrament anar al pas 3.

6) *Backtraking*:

A la variable actual se l'hi assigna el valor "indefinit" i la variable es treu de la pila. La nova variable actual és la del capdamunt de la pila.

Si la pila és buida, parar.

Cada problema particular pot tenir certes característiques que es poden utilitzar per a millorar l'eficiència del algorisme.

3.2. Identificació de variables, dominis i restriccions en el problema dels operadors.

Considerem el cas de la generació d'operadors binaris sobre un conjunt de $n+1$ termes $\{E_0, \dots, E_n\}$. En aquest problema, a cada element de la representació matricial de l'operador se li associa una variable. Si la matriu és de dimensió n , aleshores:

i) $V = \{ V_{00}, \dots, V_{0n}, V_{10}, \dots, V_{1n}, \dots, V_{n0}, \dots, V_{nn} \}$ és el conjunt de variables.

ii) Els valors que podran prendre les variables seran en principi qualsevol dels termes, és a dir, el domini de la variable V_{ij} sera $D_{ij} = \{E_0, \dots, E_n\}$.

iii) Per altra part, les restriccions poden ser de dos classes:

- propietats que ha de cumplir l'operador (per exemple, associativitat, commutativitat, monotonicitat, etc.), que seran considerades amb més extensió en els apartats següents. En general seran restriccions binàries, encara que, com en el cas de l'associativitat, puguin ser més generals.

- restriccions sobre el mateix procés de generació, com poden ser la pre-fixació de punts i la generació incremental. En la pre-fixació de punts, a l'usuari se li demana d'assignar inicialment valors a algunes variables, és a dir, es fixen els resultats d'algunes combinacions. La generació incremental consisteix en la construcció d'un operador sobre un conjunt de termes E per extensió d'un operador definit sobre un subconjunt $F \subseteq E$. En realitat aquest tipus de restricció és fàcilment reduïble a l'anterior.

4. Aplicació a la generació d'una classe general d'operadors.

Suposem que $LT = \{ E_0 \leq E_1 \leq \dots \leq E_n \}$ sigui un conjunt de termes lingüístics ordenats, és a dir, que el grau de certesa expressat per E_i és menor que el de E_j si $i < j$.

El problema que es planteja és generar tots els operadors binaris sobre un conjunt ordenat de termes LT, a qui eventualment s'els hi requereix el compliment d'algunes de les propietats que es consideren a continuació. Aquestes propietats són suficientment generals com per permetre generar classes molt àmplies d'operadors que incloguin, per exemple, tots els que defineixen les àlgebres de valors de veritat especificades a l'apartat 2.1 del capítol 2.

4.1. Conjunt de restriccions opcionals

El conjunt de propietats que opcionalment podran ser considerades, per tal d'especificar diferents tipus d'operadors són:

G-1) *Associativitat*

$$T(E_i, T(E_j, E_k)) = T(T(E_i, E_j), E_k)$$

G-2) *Commutativitat*

$$T(E_i, E_j) = T(E_j, E_i)$$

G-3) *Monotonicitat*

G-3.1 respecte a la primera variable

$$\text{G-3.1.1 creixent: } T(E_i, E_k) \leq T(E_j, E_k), \text{ si } i \leq j$$

$$\text{G-3.1.2 decreixent: } T(E_i, E_k) \geq T(E_j, E_k), \text{ si } i \leq j$$

G-3.2 respecte a la segona variable

$$\text{G-3.2.1 creixent: } T(E_k, E_i) \leq T(E_k, E_j), \text{ si } i \leq j$$

$$\text{G-3.2.2 decreixent: } T(E_k, E_i) \geq T(E_k, E_j), \text{ si } i \leq j$$

G-4) *Element neutre*

$$\text{G-4.1 per la dreta } E_{nd}: T(E_{nd}, E_i) = E_i$$

$$\text{G-4.2 per l'esquerra } E_{ne}: T(E_i, E_{ne}) = E_i$$

G-5) *Element absorbent*

$$\text{G-5.1 per la dreta } E_{ad}: \quad T(E_{ad}, E_i) = E_{ad}$$

$$\text{G-5.2 per l'esquerra } E_{ae}: \quad T(E_i, E_{ae}) = E_{ae}$$

G-6) *alfa-suavitat* ($1 \leq \alpha \leq n$)

$$\text{G-6.1 segons fila :} \quad T(E_i, E_j) = E_k, T(E_i, E_{j-1}) = E_p \implies k \leq p + \alpha$$

$$\text{G-6.2 segons columna:} \quad T(E_i, E_j) = E_k, T(E_{i-1}, E_j) = E_q \implies k \leq q + \alpha$$

$$\text{G-6.3 segons diagonal:} \quad T(E_i, E_j) = E_k, T(E_{i-1}, E_{j-1}) = E_r \implies k \leq r + \alpha$$

G-7) *Intercanvi*

$$T(E_i, T(E_j, E_k)) = T(E_j, T(E_i, E_k))$$

G-8) *Fixació de punts*

$$T(E_i, E_j) = E_k$$

Aquestes propietats actuaran com un conjunt de restriccions opcionals que podran ser seleccionades segons el tipus de connectiu que l'operador vulgui modelitzar. El compliment de cadascuna d'aquestes propietats o restriccions comporta les següents observacions respecte a la seva influència en la búsqueda de solucions del problema de la generació d'operadors:

- la commutativitat permet reduir el conjunt de variables a considerar, és a dir, només cal tenir en compte el següent conjunt de variables $V = \{ V_{ij} / i \leq j \}$
- l'existència d'elements absorbent E_a i neutre E_b per la dreta (resp. per l'esquerra), implica que l'únic valor possible per a la variable V_{aj} (resp. V_{ja}) és E_a , i l'únic valor per a la variable V_{bj} (resp. V_{jb}) és E_j .
- la monotonia, en cadascuna de les seves quatre variants, es comprova cada vegada que s'assigni un valor a una variable.
- la condició d'alfa-suavitat es comprova cada vegada que un nou valor s'assigna a una variable, en les seves tres variants. Observi's que la condició d'alfa-suavitat segons diagonal implica la condició segons fila i columna.
- tant l'associativitat com la propietat d'intercanvi només es poden comprovar un cop s'han assignat valors a totes les variables

4.2 Exemple.

A títol d'exemple, a continuació es llisten els operadors de dimensió 5 que s'obtenen quan s'imposen les següents restriccions, característiques d'operadors implicació:

- * Decreixença en la primera variable
- * Creixença en la segona variable
- * l'element 4 neutre per l'esquerra
- * l'element 4 absorbent per la dreta
- * condició de suavitat $\alpha = 1$ per a fila i columna
- * intercanvi
- * fixar $T(0,0) = 4$

Aleshores els possibles operadors són:

4	4	4	4	4
3	4	4	4	4
2	3	4	4	4
1	2	3	4	4
0	1	2	3	4

4	4	4	4	4
3	3	4	4	4
2	2	3	4	4
1	1	2	3	4
0	1	2	3	4

4	4	4	4	4
3	3	3	3	4
2	3	3	3	4
1	2	3	3	4
0	1	2	3	4

4	4	4	4	4
3	3	3	3	4
2	2	3	3	4
1	1	2	3	4
0	1	2	3	4

4	4	4	4	4
3	3	3	4	4
2	2	2	3	4
1	2	2	3	4
0	1	2	3	4

4	4	4	4	4
3	3	3	4	4
2	2	2	3	4
1	1	2	3	4
0	1	2	3	4

4	4	4	4	4
3	3	3	3	4
2	2	2	3	4
1	2	2	3	4
0	1	2	3	4

4	4	4	4	4
3	3	3	3	4
2	2	2	3	4
1	1	2	3	4
0	1	2	3	4

5. Aplicació a la generació d'operadors conjunció.

En l'apartat anterior s'ha plantejat el problema de la generació d'una classe molt general d'operadors. La contrapartida d'aquesta generalitat és la baixa eficiència de l'algorisme per respecte a l'eficiència que poden exhibir algorismes específics per a un tipus determinat de connectiu, on moltes restriccions poden estar implícites en el codi.

Per les raons que a continuació s'exposen, els operadors conjunció han sigut objecte d'especial atenció, implementant-se un algorisme específic per a ells. De fet, cronològicament aquest va ser anterior al descrit al apartat anterior. En efecte, a part dels operadors conjunció, els tipus d'operadors més usats en sistemes basats en regles (també els més usats) són els de disjunció, negació, i propagació ("detachment"). D'una banda, la generació d'un operador de negació forta no comporta cap dificultat, ja que si un tal operador ha de ser monòtonament decreixent respecte a l'ordre de LT, o sigui,

$$\text{Neg}(E_i) \geq \text{Neg}(E_j), \text{ si } i \leq j,$$

i ha de ser involutiu, és a dir,

$$\text{Neg}(\text{Neg}(E_i)) = E_i, \text{ per a } i = 0, \dots, n,$$

aleshores la única funció de LT en LT que satisfà aquests requeriments és la següent:

$$\text{Neg}(E_i) = E_{n+1-i}, \text{ per a } i = 0, \dots, n.$$

D'altra banda, els operadors disjunció es poden generar per dualitat respecte a operadors conjunció i l'operador negació. Finalment, a l'operador que propaga la certesa de les premisses a la conclusió de les regles, i que per tant modelitza la regla d'inferència del Modus Ponens, tal com s'ha vist al capítol 1, se li requereixen bàsicament les mateixes propietats que a un operador conjunció, o bé, per exemple, pot ser construït a partir dels operadors negació i disjunció, o per residuació a partir del de conjunció.

Per últim, la implementació d'un algorisme específic per a la generació d'operadors conjunció ha permès aprofitar les especials característiques de les restriccions que han de complir necessàriament aquests operadors (restriccions C-1÷ C-5 del subapartat següent). Aquest algorisme específic presenta un considerable augment de l'eficiència respecte a l'algorisme general de generació d'operadors amb les restriccions opcionals

descrites en el subapartat 4.1. L'augment de l'eficiència es deu principalment a la comprovació incremental de la propietat associativa explicada en el següent subapartat.

5.1. Conjunt de restriccions per a operadors conjunció.

Les propietats que s'exigiran a un operador de conjunció seran d'entrada la contrapartida al cas finit de les propietats que defineixen a les t-normes, exceptuant la continuïtat que, de forma opcional, ve substituïda per la que anomenem alfa-suavitat:

C-1) *Associativitat*

$$T(E_i, T(E_j, E_k)) = T(T(E_i, E_j), E_k)$$

C-2) *Commutativitat*

$$T(E_i, E_j) = T(E_j, E_i)$$

C-3) *Monotonicitat creixent*

$$T(E_i, E_k) \leq T(E_j, E_k), \text{ si } i \leq j$$

C-4) *Element neutre* E_n

$$T(E_n, E_i) = E_i$$

C-5) *Element absorbent* E_0

$$T(E_0, E_i) = E_0$$

Les propietats que opcionalment poden ésser considerades són:

C-6) *Operador estricte*

$$T(E_i, E_j) > E_0, \text{ si } i, j > 0$$

C-7) *alfa-suavitat*

C-7.1 segons fila i columna: $T(E_i, E_j) = E_k, T(E_i, E_{j-1}) = E_p \implies k \leq p + \alpha$

C-7.3 segons diagonal: $T(E_i, E_j) = E_k, T(E_{i-1}, E_{j-1}) = E_r \implies k \leq r + \alpha$

Anàlogament al cas anterior és interessant fer les següents remarques:

- la commutativitat porta a considerar només el conjunt de variables $V = \{ V_{ij} / i \leq j \}$, i redueix també de forma significativa la comprovació de les altres propietats, com poden ser l'associativitat, la monotonia, o l'alfa suavitat si hi és present.
- l'existència d'elements absorbent E_0 i neutre E_n , implica que els únics valors possibles per a les variables V_{0j} i V_{jn} són respectivament E_0 i E_j . En conseqüència, el domini d'aquestes variables queda restringit a aquests valors. A més, l'existència d'aquests elements, juntament amb la monotonia, fa que el domini de la resta de variables V_{ij} es redueixi al conjunt $D_{ij} = \{E_0, \dots, E_i\}$.
- la monotonia requereix que $V_{ij} \geq \max(V_{i-1j}, V_{ij-1})$. Aquesta condició es pot implementar fàcilment en una funció de selecció de valors.
- la condició d'alfa-suavitat, es comprova cada vegada que un nou valor s'assigna a una variable, en les seves dues variants.
- l'associativitat es beneficia de que el domini de les variables V_{ij} és el conjunt $D_{ij} = \{0, \dots, i\}$, i per tant les submatrius $M_i = ((V_{00}, \dots, V_{0i}), \dots, (V_{i0}, \dots, V_{ii}))$ són tancades respecte a l'operador conjunció. D'aquesta forma, la matriu completa serà associativa si totes aquestes submatrius ho són. Aquesta propietat permet testejar l'associativitat de forma incremental. Per tal d'aprofitar les avantatges computacionals que aquesta propietat ens proporciona, és necessari seguir un ordre específic en l'assignació de variables: $V_{00}, V_{01}, V_{11}, V_{02}, V_{12}, V_{22}, \dots$. La propietat associativa es comprova cada vegada que una de les submatrius s'ha completat, és a dir, quan s'ha assignat un valor a una variable del tipus V_{ij} .
- la condició d'operador estricte implica que la generació de matrius estrictes de dimensió "n" és equivalent a generar matrius no estrictes de dimensió "n-1". Per aquesta raó, aquesta condició no està considerada en la nostra implementació actual.

5.2. Resultats.

El nombre de solucions segons el nombre de termes i el valor d'alfa per a una condició de salt respecte a fila i a columna (fc) són :

§4. Càlcul amb un nombre finit de valors. Generació d'operadors.

<i>n</i> \ <i>Alfa</i>	1	2	3
3	2	2	2
4	4	6	6
5	8	20	22
6	16	70	94
7	32	249	408
8	64	921	—

D'altra banda, el nombre de solucions segons el nombre de termes i el valor d'alfa per a una condició de salt respecte a fila, columna i diagonal (fcd) són:

<i>n</i> \ <i>Alfa</i>	1	2	3
3	1	2	2
4	1	5	6
5	1	12	21
6	1	31	75
7	1	83	270
8	1	233	1011

6. El.licitació del operador.

6.1. Selecció posterior. Interacció guiada.

Degut a que el nombre de matrius solucions és molt elevat en molts casos, es fa necessari un procés de selecció, posterior al de la generació. Aquest tindrà per objectiu seleccionar entre totes les matrius solucions, és a dir, totes les matrius que satisfacin les propietats abans esmentades, aquella que s'adapti millor a la forma de combinació de l'expert en un cas concret.

El mètode de selecció actualment implementat es basa en una interacció guiada amb l'usuari. En aquest mètode, a l'usuari (l'expert) se li demana escullir el resultat de la combinació de varis parells de termes entre un conjunt de possibles resultats. Les combinacions que se li demanen al usuari són aquelles que, després del procés de generació, se li han assignat diferents valors en el conjunt total de solucions. Cada vegada que l'usuari fixa una combinació, el conjunt de matrius solucions a considerar es redueix. L'objectiu és doncs trobar una bona heurística per tal d'arribar a una única matriu solució amb el mínim nombre de preguntes.

L'heurística actualment implementada es descriu a continuació. Per a cada posició (i,j) amb més d'un valor assignat, es fa una estimació del màxim nombre de preguntes que s'haurien de fer si la posició (i,j) fos la seleccionada per preguntar. Siguin

MS : conjunt actual de matrius solució en consideració

NP_{MS} : nombre de posicions amb més d'un valor assignat en el conjunt MS de matrius

N_{ij} : nombre de valors diferents assignats a la posició (i,j)

V_{ij}^k : k -ésim valor assignat a la posició (i,j)

F_{ij}^k : freqüència del valor k -ésim de la posició (i,j) en el conjunt de matrius MS

Suposem que es pregunta la posició (i,j) i es fixa la combinació amb el valor k -ésim V_{ij}^k . Aleshores, el nombre màxim de preguntes a fer començant per la posició (i,j) sempre serà inferior al mínim entre la freqüència de V_{ij}^k , F_{ij}^k , i el nombre de posicions a fixar dins del conjunt MS . Així doncs, amb l'hipòtesi d'equiprobabilitat a l'hora d'escullir un valor o un altre per part de l'expert, el nombre màxim esperat de preguntes a fer en cas de començar seleccionant la posició (i,j) serà:

$$G(i,j) = (1/N^{ij}) \sum_{k=1}^{N^{ij}} \min(F_{ij}^k, NP_{MS})$$

D'aquesta forma, l'heurística consistirà en minimitzar aquesta funció. Aleshores, a cada pas es selecciona aquella posició (i',j') amb el valor de G més baix, i se li demana al usuari fixar un valor $V_{i'j'}$ entre els diferents valors assignats, per a la combinació que determina la posició (i',j'). Posteriorment, s'actualitza el conjunt de matrius a considerar ($MS \leftarrow MS \cap \{matrius \text{ tals que } V_{i'j'} = V_{i'j'}\}$), i per tant també el valor de " NP_{MS} ", i el procés es repeteix fins que en el conjunt MS hi hagi una única matriu.

6.2 Exemple d'interacció

El següent exemple mostra les 8 diferents possibilitats d'interacció en el cas de la generació de matrius conjunció de dimensió 5, amb un valor d'alfa = 1 per a fila i columna:

> (mat 5 1) ; es calculen les solucions

8

> (fixa-punts) ; interacció 1

Valor de NP_{MS} = 6

Nombre de matrius de MS = 8

Posició seleccionada = (2 2)

Valors possibles = (2 1 0)

Entra valor: 0 ; es fixa la posició (2 2) a 0

Matriu seleccionada

0 0 0 0 0

0 0 0 0 1

0 0 0 1 2

0 0 1 2 3

0 1 2 3 4

T

> (fixa-punts) ; interacció 2

Valor de NP_{MS} = 6

§4. Càlcul amb un nombre finit de valors. Generació d'operadors.

Nombre de matrius de MS = 8

Posició seleccionada = (2 2)

Valors possibles = (2 1 0)

Entra valor: 1

; es fixa la posició (2 2) a 1

Valor de NP_MS = 4

Nombre de matrius de MS = 3

Posició seleccionada = (1 1)

Valors possibles = (1 0)

Entra valor: 0

; es fixa la posició (1 1) a 0

Matriu seleccionada

; matriu solució

0 0 0 0 0

0 0 0 1 1

0 0 1 2 2

0 1 2 3 3

0 1 2 3 4

T

> (fixa-punts)

; interacció 3

Valor de NP_MS = 6

Nombre de matrius de MS = 8

Posició seleccionada = (2 2)

Valors possibles = (2 1 0)

Entra valor: 1

; es fixa la posició (2 2) a 1

Valor de NP_MS = 4

Nombre de matrius de MS = 3

Posició seleccionada = (1 1)

Valors possibles = (1 0)

Entra valor: 1

; es fixa la posició (1 1) a 1

Valor de NP_MS = 2

Nombre de matrius de MS = 2

Posició seleccionada = (2 3)

Valors possibles = (2 1)

Entra valor: 1

; es fixa la posició (2 3) a 1

Matriu seleccionada

; matriu solució

0 0 0 0 0
0 1 1 1 1
0 1 1 1 2
0 1 1 2 3
0 1 2 3 4

T

> (fixa-punts)

; interacció 4

Valor de NP_MS = 6

Nombre de matrius de MS = 8

Posició seleccionada = (2 2)

Valors possibles = (2 1 0)

Entra valor: 1

; es fixa la posició (2 2) a 1

Valor de NP_MS = 4

Nombre de matrius de MS = 3

Posició seleccionada = (1 1)

Valors possibles = (1 0)

Entra valor: 1

; es fixa la posició (1 1) a 1

Valor de NP_MS = 2

Nombre de matrius de MS = 2

Posició seleccionada = (2 3)

Valors possibles = (2 1)

Entra valor: 2

; es fixa la posició (2 3) a 2

Matriu seleccionada

; matriu solució

0 0 0 0 0
0 1 1 1 1
0 1 1 2 2
0 1 2 3 3
0 1 2 3 4

T

§4. Càlcul amb un nombre finit de valors. Generació d'operadors.

> (fixa-punts)

; interacció 5

Valor de NP_MS = 6

Nombre de matrius de MS = 8

Posició seleccionada = (2 2)

Valors possibles = (2 1 0)

Entra valor: 2

; es fixa la posició (2 2) a 2

Valor de NP_MS = 2

Nombre de matrius de MS = 4

Posició seleccionada = (1 1)

Valors possibles = (1 0)

Entra valor: 0

; es fixa la posició (1 1) a 0

Valor de NP_MS = 1

Nombre de matrius de MS = 2

Posició seleccionada = (3 3)

Valors possibles = (3 2)

Entra valor: 2

; es fixa la posició (3 2) a 2

Matriu seleccionada

; matriu solució

0 0 0 0 0

0 0 1 1 1

0 1 2 2 2

0 1 2 2 3

0 1 2 3 4

T

> (fixa-punts)

; interacció 6

Valor de NP_MS = 6

Nombre de matrius de MS = 8

Posició seleccionada = (2 2)

Valors possibles = (2 1 0)

Entra valor: 2

; es fixa la posició (2 2) a 2

Valor de NP_MS = 2

Nombre de matrius de MS = 4

Posició seleccionada = (1 1)

§4. Càlcul amb un nombre finit de valors. Generació d'operadors.

Valors possibles = (1 0)

Entra valor: 0

; es fixa la posició (1 1) a 0

Valor de NP_MS = 1

Nombre de matrius de MS = 2

Posició seleccionada = (3 3)

Valors possibles = (3 2)

Entra valor: 2

; es fixa la posició (3 3) a 2

Matriu seleccionada

; matriu solució

0 0 0 0 0

0 0 1 1 1

0 1 2 2 2

0 1 2 2 3

0 1 2 3 4

T

> (fixa-punts)

; interacció 7

Valor de NP_MS = 6

Nombre de matrius de MS = 8

Posició seleccionada = (2 2)

Valors possibles = (2 1 0)

Entra valor: 2

; es fixa la posició (2 2) a 2

Valor de NP_MS = 2

Nombre de matrius de MS = 4

Posició seleccionada = (1 1)

Valors possibles = (1 0)

Entra valor: 1

; es fixa la posició (1 1) a 1

Valor de NP_MS = 1

Nombre de matrius de MS = 2

Posició seleccionada = (3 3)

Valors possibles = (3 2)

Entra valor: 2

; es fixa la posició (3 2) a 2

Matriu seleccionada

; matriu solució

0 0 0 0 0
0 1 1 1 1
0 1 2 2 2
0 1 2 2 3
0 1 2 3 4

T

> (fixa-punts)

; interacció 8

Valor de NP_MS = 6

Nombre de matrius de MS = 8

Posició seleccionada = (2 2)

Valors possibles = (2 1 0)

Entra valor: 2

; es fixa la posició (2 2) a 2

Valor de NP_MS = 2

Nombre de matrius de MS = 4

Posició seleccionada = (1 1)

Valors possibles = (1 0)

Entra valor: 1

; es fixa la posició (1 1) a 1

Valor de NP_MS = 1

Nombre de matrius de MS = 2

Posició seleccionada = (3 3)

Valors possibles = (3 2)

Entra valor: 3

; es fixa la posició (3 3) a 3

Matriu seleccionada

; matriu solució

0 0 0 0 0
0 1 1 1 1
0 1 2 2 2
0 1 2 3 3
0 1 2 3 4

T

7. Aplicacions.

Cal remarcar que les tècniques exposades en aquest capítol s'han aplicat a les eines de construcció de Sistemes Experts MILORD (Sierra, 1989) i PRINCESS¹ (CDS, 1988). En ambdós sistemes, la incertesa està representada per un conjunt de termes lingüístics que s'associen als fets i a les regles, i que expressen el grau de confiança que hi tenen els experts i/o els usuaris. La combinació i propagació de la incertesa es fa mitjançant operadors definits sobre el conjunt de termes, que s'obtenen, per a cada aplicació en particular, segons la metodologia exposada. Aquesta gestió de la incertesa és paramètrica, en el sentit que cada aplicació en concret pot determinar tant el nombre de termes com els operadors sobre el conjunt de termes a utilitzar. Això dona gran flexibilitat a l'hora d'adaptar-se en cada moment a les necessitats particulars de cada aplicació. De fet, mitjançant el concepte de morfisme d'institució, podem utilitzar lògiques diferents en diferents mòduls d'un mateix programa. Aquesta idea s'està desenvolupant en el marc del projecte SPES i més concretament en el disseny del llenguatge COLAPSES (Sierra, Agustí-Cullell, 1990).

¹ El "problem solver" de la shell PRINCESS, del qual, juntament amb Carles Sierra n'és autor el que escriu aquesta memòria, va ser desenvolupat al Centre d'Estudis Avançats de Blanes en el marc del projecte "Desarrollo de un Sistema Inferencial en Prolog con Capacidad de Tratamiento de la Incertidumbre" sota contracte amb l'empresa SIEMENS A.G., al llarg de 1988. Vegi's l'appendix 2 per a una breu descripció del sistema.

CONCLUSIONS I PERSPECTIVES

En aquesta memòria s'ha pretès fer un pas més en la formalització i fonamentació lògica dels sistemes possibilístics, principalment en quant a la vessant inferencial.

En el primer capítol s'ha aprofundit l'estudi que es va començar en (Alsina, Grané, Trillas, Sales; 1984) i en (Trillas, Valverde, 1985) sobre la possibilitat de poder formular funcionalment el Modus Ponens en general, i en concret en el marc de les lògiques funcionals multivaluades a $[0,1]$. Precisament, i a diferència dels sistemes no funcionals, es demostra aquí la dualitat entre connectiu implicació i regla del Modus Ponens. En efecte, per a cada funció d'implicació I existeix una funció generadora de modus ponens òptima m_I i recíprocament, per a cada f.g.m.p. m existeix una funció d'implicació òptima I_m . Es demostra ademés la convergència dels dos enfocaments en el sentit que, sota condicions generals, és $m_{I_m} = m$ i $I_{m_I} = I$.

En el segon capítol podriem destacar fonamentalment que s'ha aconseguit presentar les lògiques multivaluades funcionals com a institucions, és a dir, que es pot dotar a aquestes lògiques d'una deducció semàntica en el sentit clàssic, i que això permet la justificació de diversos esquemes d'inferència, entre ells el descrit en el capítol primer surt d'altres consideracions. La possibilitat d'extendre aquests resultats a altres lògiques associades a diferents models de raonament aproximat és clarament una línia a seguir en el futur.

En el tercer capítol principalment es demostra que la lògica difusa, en tant que lògica a valors a $[0,1]$, també admet per a la inferència un formalisme funcional, a través de les funcions QM_I , coherent amb el descrit a la introducció, i present al llarg de la memòria. Per altra part, encara que de moment difícil d'automatitzar, es donen les bases per a obtenir un càlcul lògic, proposant regles de combinació dels valors de la lògica per a diferents connectives. Tot això, permet fer un pas més (petit a la fi) en vers la formalització de la lògica difusa, objectiu que encara apunta més problemes que no pas solucions.

Finalment, utilitzant les idees desenvolupades en els capítols anteriors, en el capítol quart s'ha desenvolupat un mètode per a generar àlgebres sobre un conjunt finit i ordenat de valors de veritat. Aquest mètode s'ha mostrat especialment apropiat per a

generar operadors aptes per ser utilitzats en motors d'inferències de Sistemes Experts, com a mecanismes per a la propagació d'incertesa expressada a través d'un conjunt finit de termes lingüístics, dels que només està especificada la seva ordenació. Aquest tòpic és un dels temes d'estudi del projecte DRUMS, "ESPRIT Basic Research Action" en la que l'autor, com a membre d'un equip del CEAB, està involucrat. Com a proper objectiu a desenvolupar en aquesta línia hi ha la implementació d'un mecanisme general de restriccions, que permeti expressar les restriccions o propietats a complir per els operadors de forma tan general com l'usuari requereixi.

Apèndix 1: NORMES I CONORMES TRIANGULARS. FUNCIONS DE NEGACIÓ.

Seguint (Jacas, 1987), en aquest apèndix es dóna un breu resum de propietats i resultats bàsics sobre normes i conormes triangulars (t-normes i t-conormes), les seves quasi-inverses, i funcions de negació que són utilitzats al llarg de la memòria. Un estudi més ampli sobre les primeres es pot trobar en (Schweizer, Sklar; 1983), i sobre l'ús d'aquestes funcions com a connectius a en lògiques multivaluades en (Valverde, 1982 i 1985).

1. t-normes i t-conormes: generalitats.

Les t-normes i t-conormes són un tipus especial de semigrups topològics ordenats de la recta real, i venen donades per les següents definicions.

Definició 1.1

Una operació T de $[0,1] \times [0,1]$ en $[0,1]$ es diu que és una t-norma contínua si satisfà les següents propietats:

- T1) *Associativitat:* $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$
- T2) *Commutativitat:* $T(x, y) = T(y, x)$
- T3) *Monotonia:* si $x \leq x'$, aleshores $T(x, y) \leq T(x', y)$
si $y \leq y'$, aleshores $T(x, y) \leq T(x, y')$
- T4) *Condicions de contorn:* $T(1, x) = x$
 $T(0, x) = 0$
- T5) *Continuïtat:* T és contínua com a funció de dos variables.

Definició 1.2

Una operació S de $[0,1] \times [0,1]$ en $[0,1]$ es diu que és una t-conorma contínua si satisfà les següents propietats:

- S1) *Associativitat:* $S(x, S(y, z)) = S(S(x, y), z)$

- S2) *Commutativitat:* $S(x,y) = S(y,x)$
 S3) *Monotonia:* si $x \leq x'$, aleshores $S(x,y) \leq S(x',y)$
 si $y \leq y'$, aleshores $S(x,y) \leq S(x,y')$
 S4) *Condicions de contorn:* $S(1,x) = 1$
 $S(0,x) = x$
 S5) *Continuïtat:* S és contínua com a funció de dos variables.

Sempre que a la memòria es refereix a t-normes i t-conormes sempre es suposa implícita la continuïtat.

Els elements idempotents i nilpotents juguen un paper fonamental per a la classificació i caracterització de les t-normes i t-conormes. Per a cada t-norma T , $E(T)$ indicarà el conjunt d'elements idempotents, és a dir,

$$E(T) = \{ x \in [0,1] / T(x,x) = x \},$$

i $NIL(T)$ el conjunt d'elements nilpotents, o sigui,

$$NIL(T) = \{ x \in [0,1] / \text{existeix } m \in \mathbb{N} \text{ tal que } T^m(x) = 0 \},$$

on T^m es defineix de forma recurrent posant $T^1(x) = x$, i $T^m(x) = T(T^{m-1}(x),x)$.

De forma anàloga, per a cada t-conorma S tenim

$$E(S) = \{ x \in [0,1] / S(x,x) = x \},$$

$$NIL(S) = \{ x \in [0,1] / \text{existeix } m \in \mathbb{N} \text{ tal que } S^m(x) = 1 \},$$

Definició 1.4.

Una t-norma T és arquimediana si, i només si, $E(T) = \{0,1\}$.

Una t-conorma S és arquimediana si, i només si, $E(S) = \{0,1\}$.

La t-norma $T^1(x,y) = \min$, i la t-conorma $S^1(x,y) = \max(x,y)$ no són arquimedianes ja que $E(T) = E(S) = [0,1]$

El resultat fonamental relatiu a la representació de t-normes i t-conormes són els dos següents teoremes, deguts a C.H. Ling

Teorema 1.5. (Ling)

Una t-norma T és arquimediana si, i només si, existeix una funció contínua i estrictament decreixent f de $[0,1]$ en $[0, +\infty]$ amb $f(1) = 0$ tal que

$$T(x,y) = f^{-1}(f(x) + f(y))$$

on $f^{[-1]}$ indica la pseudo-inversa de f , definida per

$$\begin{aligned} f^{[-1]}(x) &= 1, \text{ si } x < 0 \\ &= f^{-1}(x), \text{ si } x \in [0, f(0)] \\ &= 0, \text{ altrament} \end{aligned}$$

Teorema 1.5.bis

Una t -conorma S és arquimediana si, i només si, existeix una funció contínua i estrictament creixent g de $[0,1]$ en $[0, +\infty]$ amb $g(0) = 0$ tal que

$$S(x,y) = g^{[-1]}(g(x) + g(y))$$

on $g^{[-1]}$ indica la pseudo-inversa de g , definida per

$$\begin{aligned} g^{[-1]}(x) &= 0, \text{ si } x < 0 \\ &= g^{-1}(x), \text{ si } x \in [0, g(1)] \\ &= 1, \text{ altrament} \end{aligned}$$

Les funcions f i g s'anomenen generadors additius de la t -norma i de la t -conorma respectivament, i són únics a menys de constants multiplicatives. Exemples de parelles arquimedianes són:

$$T^2(x,y) = xy \quad (f(x) = -\ln(x)) \quad ; \quad S^2(x,y) = x+y-xy \quad (g(x) = -\ln(1-x))$$

$$T^3(x,y) = \max(x+y-1, 0) \quad (f(x) = 1-x) \quad ; \quad S^3(x,y) = \min(x+y, 1) \quad (g(x) = x)$$

Una t -norma qualsevol admet la representació següent.

Teorema 1.6 (Paalman de Miranda).

Si T és una t -norma tal que $[0,1]-E(T) = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$, existeix una família de funcions contínues i estrictament decreixents f_i de (a_i, b_i) en $[0, +\infty]$ amb $f_i(b_i) = 0$, $i \in I$, tal que

$$\begin{aligned} T(x,y) &= f_i^{[-1]}(f_i(x) + f_i(y)), \text{ si } (x,y) \in [a_i, b_i]^2 \\ &= \min(x,y), \text{ altrament} \end{aligned}$$

Teorema 1.6 bis.

Si S és una t -conorma tal que $[0,1]-E(S) = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$, existeix una família de funcions contínues i estrictament creixents g_i de (a_i, b_i) en $[0, +\infty]$ amb $g_i(a_i) = 0$, $i \in I$, tal que

$$\begin{aligned} S(x,y) &= g_i^{[-1]}(g_i(x) + g_i(y)), \text{ si } (x,y) \in [a_i, b_i]^2 \\ &= \max(x,y), \text{ altrament} \end{aligned}$$

D'aquests teoremes de representació es conclou que les demostracions on intervinguin t-normes o t-conormes es reduïxen al cas de les arquimedianes o a la parella mín-màx.

Definició 1.7.

Una t-norma (resp. t-conorma) es diu estricta si $NIL(T) = \emptyset$ (resp. $NIL(S) = \emptyset$), i nilpotent o no estricta si $NIL(T) = (0,1)$ (resp. $NIL(S) = (0,1)$).

Una caracterització de les t-normes (resp. t-conormes) nilpotents és la següent (Schweizer & Sklar, 1983): Una t-norma T (resp. t-conorma S) és nilpotent si, i només si, admet un generador additiu f (resp. g) tal que $f(0) < +\infty$ (resp. $g(1) < +\infty$).

Definició 1.8.

Dues t-normes T i T' són isomorfes si existeix una bijecció h contínua i creixent de $[0,1]$ en $[0,1]$ tal que

$$T' = h \circ T \circ (h^{-1} \times h^{-1})$$

A conseqüència d'aquesta definició es tenen els resultats següents:

- * L'únic semigrup topològic isomorf al $([0,1], \text{mín})$ és ell mateix.
- * Tots els semigrups topològics $([0,1], T)$, amb T estricta, són isomorfs al semigrup $([0,1], T^2)$.
- * Tots els semigrups topològics $([0,1], T)$, amb T nilpotent, són isomorfs al semigrup $([0,1], T^3)$.

Anàlogament per a les t-conormes tenim:

- * L'únic semigrup topològic isomorf al $([0,1], \text{màx})$ és ell mateix.
- * Tots els semigrups topològics $([0,1], S)$, amb S estricta, són isomorfs al semigrup $([0,1], S^2)$.
- * Tots els semigrups topològics $([0,1], S)$, amb S nilpotent, són isomorfs al semigrup $([0,1], S^3)$.

2. Quasi-inverses de t-normes i t-conormes.

Si T i S són una t-norma i una t-conorma respectivament, aleshores els conjunts

$$\{ c \in [0,1] / T(x,c) \leq y \}$$

$$\{ c \in [0,1] / S(x,c) \geq y \}$$

són no buïts, donat que $T(x,0) = 0$ i $S(x,1) = 1$. Això permet donar les següents definicions.

Definició 2.1.

Donada una t-norma T , s'anomena quasi-inversa de T a la funció $T^\wedge$ de $[0,1] \times [0,1]$ en $[0,1]$ definida per

$$T^\wedge(x / y) = \text{Sup}\{ x \in [0,1] / T(x,c) \leq y \}$$

Definició 2.2.

Donada una t-conorma S , s'anomena quasi-inversa de S a la funció $S^\wedge$ de $[0,1] \times [0,1]$ en $[0,1]$ definida per

$$S^\wedge(x / y) = \text{Inf}\{ x \in [0,1] / S(x,c) \geq y \}$$

En quant a quasi-inverses de t-normes las propietats més interessants són:

* Si T és arquimediana de generador additiu f , aleshores

$$T^\wedge(x / y) = f^{[-1]}(f(y) - f(x)).$$

* $T^\wedge$ és monòtona decreixent respecte a la primera variable, i creixent respecte a la segona.

* $T^\wedge(x / y) = 1$ si, i només si, $x \leq y$

* $T^\wedge(x / y) \geq z$ si, i només si, $T(x,z) \leq y$

* $T(T^\wedge(x / y), T^\wedge(y / z)) \leq T^\wedge(x / z)$

* Si $T \leq T'$, aleshores $T^\wedge \geq T'^\wedge$

Exemples:

$$T^1(x / y) = 1, \text{ si } x \leq y; \quad T^1(x / y) = y, \text{ altrament}$$

$$T^2(x / y) = 1, \text{ si } x \leq y; \quad T^2(x / y) = y/x, \text{ altrament}$$

$$T^3(x / y) = 1, \text{ si } x \leq y; \quad T^3(x / y) = 1-x+y, \text{ altrament}$$

De forma anàloga, per a les quasi-inverses de les t-conormes tenim:

* Si S és arquimediana de generador additiu g , aleshores

$$S^{\wedge}(x / y) = g^{[-1]}(g(y) - g(x)).$$

* $S^{\wedge}$ és monòtona decreixent respecte a la primera variable, i creixent respecte a la segona.

* $S^{\wedge}(x | y) = 0$ si, i només si, $x \geq y$

* $S^{\wedge}(x | y) \leq z$ si, i només si, $S(x, z) \geq y$

* $S(S^{\wedge}(x | y), S^{\wedge}(y | z)) \geq S^{\wedge}(x | z)$

* Si $S \leq S'$, aleshores $S^{\wedge} \geq S'^{\wedge}$

Exemples:

$S^{1\wedge}(x | y) = 0$, si $x \geq y$; $S^{1\wedge}(x | y) = y$, altrament

$S^{2\wedge}(x | y) = 0$, si $x \geq y$; $S^{2\wedge}(x | y) = (y-x)/(1-x)$, altrament

$S^{3\wedge}(x | y) = 0$, si $x \geq y$; $S^{3\wedge}(x | y) = y-x$, altrament

3. Funcions de negació.

Definició 3.1

Una funció de negació n és una funció decreixent de $[0,1]$ en ell mateix tal que $n(0) = 1$ i $n(1) = 0$. Si $n(n(x)) \leq x$ per a tot $x \in [0,1]$, es diu que n és una funció de negació ordinària, i si $n(n(x)) \geq x$ per a tot $x \in [0,1]$, es diu que n és feble. Per últim, les negacions ordinàries i febles alhora són anomenades fortes, és a dir, aquelles que són involucions, és a dir $n(n(x)) = x$.

Els següents teoremes caracteritzen a les funcions de negació fortes.

Teorema 3.2 (Trillas)

Una funció n de $[0,1]$ en $[0,1]$ és una negació forta si, i només si, existeix una funció contínua i estrictament creixent g de $[0,1]$ en $\mathbb{R}^+$, amb $g(0) = 0$ tal que

$$n(x) = g^{-1}(g(1) - g(x)), \text{ per a tot } x \in [0,1].$$

Teorema 3.2 bis

Una funció n de $[0,1]$ en $[0,1]$ és una negació forta si, i només si, existeix una funció contínua i estrictament decreixent f de $[0,1]$ en $\mathbb{R}^+$, amb $f(1) = 0$ tal que

$$n(x) = f^{-1}(f(0) - f(x)), \text{ per a tot } x \in [0,1].$$

A continuació es defineix el concepte de dualitat.

Definició 3.3.

Siguin T, S i n una t -norma, una t -conorma i una negació forta respectivament. T i S són n -duals si, i només si

$$T = n \circ S \circ (n \times n), \text{ o equivalentment}$$

$$S = n \circ T \circ (n \times n).$$

Si T i S són n -duals, aleshores la terna (T, S, n) s'anomena Terna de De Morgan (Alsina, Trillas i Valverde, 1983), i la única parella n -dual per a qualsevol negació forta és la màx-mín.

Per últim, cal remarcar que, si T és una t -norma arquimediana generada additivament per f , aleshores $g = f \circ n$ genera additivament la t -conorma S n -dual de T , i recíprocament.

Un estudi més detallat es pot trobar a (Trillas, 1979) i (Esteva, 1981).

Apèndix 2: EL SISTEMA PRINCESS

Descriurem breument en aquest apèndix les característiques més rellevants del sistema PRINCESS. Primer comentarem les característiques lògiques relatives a la gestió de la incertesa, i a continuació els elements més destacats des del punt de vista de les eines de desenvolupament de sistemes experts. Per a tenir una descripció més detallada del sistema consultar (Godo, Sierra, López; 1988).

1. Característiques lògiques

1.2. Problemàtica

Treballar en lògica de primer ordre utilitzant l'aproximació al tractament de la incertesa presentat en el capítol 4 planteja una problemàtica que no era present en el cas de MILORD (Sierra, 1989). Aquesta problemàtica es podria concretar en dos aspectes:

- 1) Una fórmula implicativa (regla) pot ser aplicada més d'una vegada per obtenir una mateixa instància "ground" del predicat conclusió.
- 2) Al llarg del procés deductiu ens podem trobar amb noves instàncies de les premisses de les regles, amb la qual cosa una regla ja aplicada pot tornar-se a aplicar i variar la creença en el predicat conclusió.

Aquests dos aspectes van determinar un disseny dels motors d'inferència que tinguessin en compte com a criteri de funcionament l'obtenció de totes les instàncies dels predicats en el moment en que es demanessin a l'usuari o bé quan es deduïssin pel sistema. Cal pensar que quan una regla ha estat aplicada i ha deduit una instància "ground" del predicat conclusió, el motor ha d'intentar trobar encara les altres instàncies de les premisses que ens puguin dur a la mateixa instància de la conclusió, i combinar totes les evidències així obtingudes.

El conjunt de termes lingüístics per defecte utilitzat pel sistema és el conjunt L_2 de Bonissone (Bonissone, Decker; 1986)

$$L_2 = \{Impossible, Extremely_Unlikely, Very_Low_Chance, Small_Chance, It_May, Meaningful_Chance, Most_Likely, Extremely_Likely, Certain \}$$

amb la següent matriu de combinació per a conjuncions i propagació seqüencial:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	1	1	1	1	2	2	2
3	0	1	1	1	1	2	3	3	3
4	0	1	1	1	2	3	4	4	4
5	0	1	1	2	3	4	5	5	5
6	0	1	2	3	4	5	6	6	6
7	0	1	2	3	4	5	6	7	7
8	0	1	2	3	4	5	6	7	8

on els nombres 0, 1,..., 8 denoten els termes *Impossible*, *Extremely_Unlikely*,..., *Certain*, respectivament.

Vegi's uns exemples de regles del protipus que es va desenvolupar sobre diagnòsi d'infeccions per bacteries gramm positives:

Rule 16

If [property_value(bacteria, morphology, bacillus) ,
property_value(bacteria, shape, Y)]

conclude morphology(Y)

with certainty certain

end_of_rule

Rule 26

If [property_value(Patient, site, throat),
not(property_value(Patient, culture, streptococcal))]

conclude not(streptococcal(Patient, streptococcal))

with certainty extremely_likely

end_of_rule

Rule 36

```
If [ property_value(Patient, sex, male),  
      property_value(Patient, site, urine),  
      property_value(Patient, culture, X),  
      property_value(culture, X, Organisms_per_mm_of_urine),  
      check_if('>', Organisms_per_mm_of_urine, 100000) ]  
conclude bacteriuria(Patient, urine, X)  
with certainty extremely_certain  
  
end_of_rule
```

Rule 37

```
If [ property_value(Patient, site, X), bacteriuria(Patient, X, Y),  
      unknown(correct_disinfection(Patient, X)) ]  
conclude disease(Patient, Y)  
with certainty it_may  
  
end_of_rule
```

1.2. Tècniques introspectives

Una altra característica interessant des del punt de vista lògic és la possibilitat de raonar per introspecció. Així, tota instància "ground" pot tenir associat com a valor de certesa: *unknown* (quan l'usuari desconeix el valor de certesa, o bé quan no s'ha pogut deduir pel conjunt de regles del sistema), i es permet en la construcció de les premisses de les regles preguntar si un determinat predicat posseeix com a valor de certesa *unknown* o no. Això és molt útil per modelitzar el raonament per defecte: permet aplicar les regles que modelitzen el coneixement més general quan els predicats més específics siguin desconeguts (vegi's les regles 36 i 37 abans mostrades)

2. Llenguatge de representació a PRINCESS

El llenguatge que es va desenvolupar presenta altres característiques remarcables des del punt de vista de l'arquitectura, la representació del coneixement i del control. Veiem-ne unes quantes:

1) Modularitat

Les unitats d'execució, anomenades "rule blocks", estan estructurades en forma de graf que representa la divisió del problema en subproblemes. La seva execució ve determinada per les relacions entre els mòduls i per criteris de control que determinen el tipus de cerca: en amplada, en profunditat i per selecció de la millor opció. En aquest últim criteri cal destacar que les relacions entre els mòduls posseeixen una guarda en forma de WFF que un cop avaluada dona com a resultat un terme lingüístic que serveix per ordenar els mòduls en ordre decreixent de certesa. En cada moment s'executa aquell mòdul que presenta una creença més alta. Cada mòdul posseeix un conjunt de predicats deduïbles, els objectius, un conjunt de regles per assolir els objectius i una serie de paràmetres de control per dirigir l'aplicació de les regles.

2) Herència de regles i predicats

Un mòdul pot heredar regles i predicats dels mòduls avantpassats seus en la jerarquia definida pel graf. Hi han mecanismes d'amagament de la informació que permeten a un mòdul considerar algunes de les seves regles com a pròpies i no ser heretades pels mòduls descendents.

3) Representació orientada a Frames

Els predicats porten associada una estructura tipus frame que permet representar determinats atributs com per exemple: tipus del termes de les variables del predicat, tipus de l'herència, restriccions en els valors dels termes, etc.

4) Execució de les regles parametritzada

En els mòduls es poden definir paràmetres de control utilitzats pels motors en l'aplicació de les regles. Entre ells destaquen: tipus del motor a utilitzar (endavant o enrera), tipus de cerca sobre les regles (aplicar només una, aplicar-les totes) i forma de fer la resolució de conflictes (regla més específica primer, regla més certa primer, regles amb menys premisses primer).

5) Meta-control

S'han definit metaregles que permeten en un moment determinat visitar mòduls de la jerarquia que no siguin els que el mecanisme de recorregut seleccionaria en aquell moment. Això ens permet reaccionar de forma ràpida davant d'informacions molt rellevants que necessitin un canvi global d'estratègia del sistema. Aquestes metaregles són executades de forma immediata, es a dir tant bon punt una metaregla és activable

aquesta es dispara i les seves accions es tenen en compte immediatament. Vegi's un exemple de metaregla:

Metarule 33

```
If [ property_value(bacteria, aerobicity, aerobic),  
      property_value(bacteria, aerobicity, anaerobic) ]  
over threshold it_may  
Visit badly_need
```

end_of_rule

En la següent metaregla es pot veure la utilització del mecanisme d'introspecció:

Metarule 31

```
If [ is_unknown(property_value(bacteria, stain, X)) ],  
      [ is_unknown(property_value(bacteria, aerobicity, Y)) ]  
over threshold extremely_likely  
visit badly_need
```

end_of_rule

BIBLIOGRAFIA.

- Ackermann R. (1967). **An Introduction to Many-Valued Logics**. Routledge & Kegan Paul Ltd. Londres
- Aczél, J. (1966). **Lectures on Fucntional Equations and their Applications**. Academic Press, New York.
- Agustí-Cullell J., Esteva F., Garcia P., Godo Ll. (1990) **Formalizing Multiple-valued Logics as Institutions**. Apareixarà a Proc. del I.P.M.U.'90. Paris.
- Agustí-Cullell J., Sierra C. (1989) **Adding Generic Modules to Flat Rule-Based Languages: a low cost approach**. Methodologies for Intelligent Systems, pp. 43-52, North Holland.
- Alsina C., Grané J., Sales T., Trillas E. (1984). **Algunes consideracions sobre el Modus Ponens: Funcions de Modus Ponens**. Actes del III Congrés Català de Lògica Matemàtica. Barcelona. 55-77.
- Alsina C., Trillas E., Valverde L. (1983). **On Some Logical Connectives for Fuzzy Sets Theory**. J. Math. Anal. and Appl. 93. 15-26.
- Baldwin J.F. (1979). **A New Approach to Approximate Reasoning using Fuzzy Logic**. Fuzzy Sets and Systems 2, 309-325
- Baldwin J.F., Pilsworth B.W. (1980). **Axiomatic Approach to Implication for Approximate Reasoning with Fuzzy Logic**. Fuzzy Sets and Systems 3, 193-220.
- Bhatnagar R.K., Kanal L.N. (1986). **Handling Uncertain Information: A review of Numeric and Non-Numeric Methods**. In L.N. Kanal and J.F. Lemmer (Eds.): *Uncertainty in Artificial Intelligence*. North Holland. Amsterdam. 3-26.
- Bodiou G. (1964). **Théorie dialectique des probabilités**. Gauthier-Villars, Paris.

- Bonissone P.P., Decker K.S. (1985). **Selecting uncertainty and granularity: an experiment in trading-off precision and complexity** in Kanal, L.N. and Lemmer, J.F. (EDs.) *Uncertainty in Artificial Intelligence*, North-Holand, Amsterdam pp. 217-247.
- Carnap R. (1949). **Logical Foundations of Probability**. University of Chicago Press. Chicago.
- C. D.S.(Centro de Desarrollo de Software, SIEMENS S.A.) (1988). **PRINCESS: Entorno para el desarrollo de Sistemas Expertos**. Memòria Interna.
- Dubois D., Prade H. (1988a). **The Treatment of Uncertainty in Knowledge-based Systems Using Fuzzy Sets and Possibility Theory**. *International Journal of Intelligent Systems*, Vol. 3 pp. 141-165
- Dubois D., Prade H. (1988b). **An Introduction to Possibilistic and Fuzzy Logics** in *Non-standard Logics for Automated Reasoning*, P. Smets et al (EDs.), Academic Press, New York, pp. 287-326.
- Dubois D., Prade H. (1988c). **Conditioning in Possibility and Evidence Theories - A Logical Viewpoint -**. en el *Lectures Notes in Computer Science 313, Uncertainty in Artificial Intelligence*. Springer Verlag.
- Dubois D., Prade H. (1988d) (1988d) **Modelling uncertain and vague knowledge in possibilityb and evidence theories**. *Proc. del 4th. AAAI Workshop on Uncertainty in Artificial Intelligence*, Minnesota.
- Dubois D., Prade H., Testemale C. (1988e). **In search of a modal system for possibility theory**. *Proc del 8th.E.C.A.I.*, Munich, 501-506.
- Dubois D., Lang J., Prade H. (1989). **Automated Reasoning Using Possibilistic Logic: Semantics, Belief Revision and Variable Certainty Weights**. *Proceedings of the fifth workshop on Uncertainty in Artificial Intelligence*, Windsor, Ontario, Canada. pp. 81-87.
- Esteva, F. (1981) **Negaciones en la teoria de conjuntos difusos**. *Stochastica V-1*, 33-44.

- Felix R., Godo Ll., Höffmann A., Sierra C., Moraga C., **VLSI chip Architecture Selection using Reasoning based in Fuzzy Logic**" Proc del IEEE 19th. International Symposium of Multiple-valued Logic. Guangzhou (Xina).
- Fiadeiro J., Sernadas A. (1988). **Structuring Theories on Consequence.** en Sanella D. et al. (eds.): Recent Trends in Data Type Specification, Springer Verlag.
- Fine, T.L. (1973). **Theories of Probability.** Academic Press, New York.
- Garcia P., Valverde L. (1989) **Isomorphisms between De Morgan triplets.** Fuzzy Sets and Systems, Vol. 30, nº 1, 27-36.
- Genesereth M.R., Nilsson N.J.(1987) **Logical Foundations of Artificial Intelligence.** Morgan Kaufmann Pu.
- Ginsberg M.L. (1986) **Multi-valued logics.** Proc del A.A.A.I.-86, Philadelfia,243-247
- Godo, L., Jacas J., Valverde L. (1990). **Fuzzy Values in Fuzzy Logic.** To appear in International Journal of Intelligent Systems.
- Godo Ll., López de Màntaras R., Sangüesa R. (1990). **Research progress in R.P.2.3. on connective operators elicitation for linguistic term sets.** Informe intern de la ESPRIT Basic Research Action DRUMS nº 3085
- Godo Ll., López de Màntaras R., Sierra C., Verdaguer A. (1989). **MILORD: the architecture and management of linguistically expressed uncertainty.** International Journal of Intelligent Systems, Vol. 4 pp. 471-501.
- Godo Ll., Sierra C. (1988). **A New Approach to Connective Generation in the Framework of Expert Systems Using Fuzzy Logic.** Proc. of the IEEE 18th International Symposium on Multiple-Valued Logic, Palma de Mallorca (Spain)
- Godo Ll., Sierra C., López B. (1988). **The Princess Problem Solver.** Document intern del CEAB.

- Goguen J., Burstall (1983). **Introducing Institutions**. Proc. Workshop on Logics of Programs, Carnegie-Mellon University. Springer LNCS 64, pp. 221-256.
- Haack S. (1974). **Deviant Logic**. Cambridge University Press.
- Haack S. (1978) **Philosophy of Logics**. Cambridge University Press.
- Harper R., Sannella D., Tarlecki A. (1989). **Structure and Representation in LF**. Proc.4th. IEEE Symposium on Logic of Computer Science.
- Heckerman D. (1986). **Probabilistic Interpretation for MYCIN's Certainty Factors**. In L.N. Kanal and J.F. Lemmer (Eds.): *Uncertainty in Artificial Intelligence*. North Holland. Amsterdam. 167-196.
- Jacas J. (1987) **Contribució a l'Estudi de les Relacions d'Indistingibilitat i a les seves aplicacions als processos de classificació**. Tesi Doctoral. Universitat Politècnica de Catalunya.
- Kampé de Fériet, J. (1976). **L'indépendance des événements dans la Théorie Généralisée de l'Information**. Journées Lyonnaises des Questionnaires, CNRS, Groupe de Recherche 22, Paris. 1-30.
- Koopman, B.O. (1940). **The axioms and Algebra of Intuitive Probability**. Annals of Math., 41. 269-292.
- Kemeny, J.G. (1955). **Fair Bets and Degree of Confirmation**. J. Symbolic Logic, 20. 263-273.
- López de Màntaras R. (1990). **Approximate Reasoning Models**. Ellis Horwood Ltd., London.
- López de Màntaras R. (1990). **On the Relationship between Uncertainty Management and Problem Solving**. Apareixarà a Proc del IPMU'90. Paris.
- Meseguer J. (1989). **General Logics**. En Ebbinghaus H.D. et al. (eds.): Proc. Logic Colloquium'87, North-Holland

- Meseguer P. (1989). **Constraint Satisfaction Problems: an Overview.**
AI Communications, Vol 2, n° 1, March, 3-17.
- Moore R. (1980). **Reasoning about Knowledge and Action.** Technical Note
191, SRI International, Menlo Park, California.
- Niiniluoto I. (1987). **Truthlikeness.** Synthese Library, Vol. 185. Reidel, Holland.
- Nilsson N.J.(1986). **Probalistic Logic.** Artificial Intelligence, 28, 71-88
- Nguyen, H.T. (1987). **On Representation and Combinability of Uncertainty.**
Preprints of Seconf IFSA Congress. Tokyo. 506-509.
- Orlowska E., Pawlak Z. (198-) **Representation of nondeterministic
information.** I.C.S P.A.S. Report 450. Warsaw.
- Pawlak Z. (1982). **Rough Sets.** International Journal of Computer and Information
Science, 11, 341-356.
- Prade H. (1985). **A Computational Approach to Approximate and Plausible
Reasoning with Applications to Expert Systems.** IEE Transactions on
Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol. PAMI-7, n° 3, May.
- Prade H. (1980) **Compatibilité. Qualification. Modification. Niveau de
précision.** BUSEFAL n° 4, L.S.I. Toulouse, France, 71-78.
- Ramsey, F.P. (1927). **Facts and Propositions.** Proc. of the Aristotelian Society,
Supplement 7.
- Rasiowa, H. (1974). **An algebraic Approach to Non-classical Logics.** North
Holland, Amsterdam.
- Reichenbach, H. (1947). **Elements of Symbolic Logic.** The McMillan Co. (Also
in Dover, 1980).
- Rescher N. (1969). **Many-valued Logic.** Mc Graw-Hill.

- Ruspini, E.H. (1986). **The Logical Foundations of Evidential Reasoning.** Technical Note 408, Artificial Intelligence Center, SRI International, Menlo Park.
- Ruspini, E.H. (1989). **On the Semantics of Fuzzy Logic.** Technical Note 475, Artificial Intelligence Center, SRI International, Menlo Park.
- Sales T. (1982). **Contribució a l'anàlisi lògica de la imprecisió.** Tesi Doctoral. Universitat Politècnica de Catalunya.
- Sandewal E. (1985). **A Functional Approach to Non-Monotonic Logic.** Proc. del I.J.C.A.I.-85, Los Angeles, 100-106
- Schweizer B., Sklar A. (1983). **Probabilistic Metric Spaces.** North-Holland, Amsterdam.
- Shafer G. (1976). **A Mathematical Theory of Evidence.** Princeton University Press.
- Shafer, G. (1985). **Belief Functions and Possibility Measures.** In J.C. Bezdek (Ed.): *Analysis of Fuzzy Information.* C.R.C. Press, 51-84.
- Sierra C. (1989). **MILORD: Arquitectura Multi-Nivell per a Sistemes Experts en Classificació.** Tesi Doctoral. Universitat Politècnica de Catalunya.
- Sierra C., Agustí-Cullell J. (1990). **COLAPSES: A Methodolgy and a Language for Knowledge Engineering.** Report de Recerca GRIAL 90/2. CEAB
- Tarski A. (1944). **The Semantic Conception of Truth and the Foundations of Semantics.** *Philosophy and Phenomenological Research* 4, 341-376.
- Trillas E.(1979). **Sobre funciones de negació en la teoria de los conjuntos difusos.** *Stochastica* Vol III, nº1. 47-60.
- Trillas E.(1988). **Relational Probabilities on Intuitionistic Lattices.** *Stochastica* Vol XII, nº2,3. 85-102.

- Trillas, E. and L. Valverde (1984). **On Implication and Indistinguishability in the setting of Fuzzy Logic.** In R.R. Yager and J. Kacprzyk (Eds.): *Management Decision Support Systems using Fuzzy Set and Possibility Theory*. Verlag TÜV, Rheinland. 198-212.
- Trillas E. and L. Valverde (1985). **On Mode and Implication in Approximate Reasoning.** In M.M. Gupta et al. (Eds.): *Approximate Reasoning in Expert Systems*. North Holland. Amsterdam. 157-166.
- Trillas E. and L. Valverde (1987). **On Inference in Fuzzy Logic.** Preprints of Second IFSA Congress. Tokyo. 294-297.
- Valverde, L. (1980). **Sur les informations conditionelles sans F-composabilité.** Stochastica IV. 81-88.
- Valverde, L. (1982). **Contribució a l'estudi dels models matemàtics per a lògiques multivalents.** Tesis Doctoral. Universitat Politècnica Catalunya.
- Valverde L., Trillas E. (1985). **On Modus Ponens in Fuzzy Logic.** Proc. del 15th. I.S.M.V.L. Kingston (Ontario), 294-301.
- Zadeh, L.A. (1973). **Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision processes.** IEEE Trans. Sys. Man Cybern. 1, 28-44.
- Zadeh L.A. (1978). **PRUF: A meaning representation language for natural languages.** Int. J. Man-Machine Studies, Vol. 10, nº 4, 395-460.
- Zadeh, L.A. (1979). **A theory of Approximate Reasoning.** Machine Intelligence, 9. 149-194.
- Zadeh, L.A. (1975). **Fuzzy Logic and Approximate Reasoning.** Synthese, 30, pp. 407-428.
- Zadeh, L.A. (1983). **The Role of Fuzzy Logic in the management of uncertainty in Expert Systems.** Fuzzy Sets and Systems, 11, pp. 199-228.

Bibliografia.

Zinov'ev, A.A. (1963). **Philosophical Problems of Many-Valued Logic**. D.
Reidel Pu. Co., Holland

