Un apropament matemàtic al problema de la vaguetat

Carles Noguera i Clofent
Dipartimento di Scienze Matematiche ed Informatiche
Università degli Studi di Siena
Pian dei Mantellini 44
53100 Siena, Itàlia
http://www.carlesnoguera.cat
cnoguera@iiia.csic.es

Abstract

En aquest article considerem el fenomen de la vaguetat com a problema lògic i les diverses solucions que s'han proposat per tractar-lo. D'entre totes elles defensem la Lògica Borrosa Matemàtica com a tractament genuïnament matemàtic del problema i que resulta ser el més adequat per al desenvolupament d'aplicacions. Presentem els fonaments lògics i algèbrics de la disciplina des de la perspectiva de llur motivació i gènesi històrica i acabem amb una visió panoràmica del seu estat actual i perspectives de futur.

Paraules clau: Conjunts borrosos, Intel·ligència Artificial, Lògica Borrosa Matemàtica, Lògica Matemàtica, Raonament, Vaguetat.

1 Introducció

La Lògica és la ciència que estudia el raonament correcte. Ja al segle IV a. C. Aristòtil s'adonà que les disciplines del coneixement humà es presenten en forma de discurs codificat en un llenguatge tècnic, ordenat, i a través de línies argumentals. En tota argumentació es pretén que un conjunt d'afirmacions ja acceptades serveixi de suport per acceptar noves afirmacions, és a dir, que la veritat d'unes proposicions conegudes permeti concloure la veritat d'unes altres proposicions i, d'aquesta manera, augmenti el coneixement. Per evitar l'error, l'engany o la fal·làcia cal discernir amb claredat quines són les maneres acceptables en què hom pot discórrer d'unes proposicions a unes altres al llarg d'un raonament. Aristòtil, per tant, fundà la Lògica com a ciència normativa, reguladora, que es troba necessàriament a la base de tota ciència possible en la mesura que determina de quina manera s'ha d'efectuar l'argumentació correcta. La desenvolupà substancialment a partir d'un paradigma que esdevingué clàssic en què es pressuposa que tota proposició ben formulada és o bé vertadera o bé falsa. Aquesta pressuposició s'anomena *principi de bivalència*, és a dir, el principi segons el qual només hi ha dos valors de veritat, el ver i el fals, i a tota proposició li'n correspon exactament un.

Tant la filosofia antiga, com la medieval i la moderna posteriors a Aristòtil acceptaren sense reserves i preservaren aquest plantejament que fou finalment culminat amb els desenvolupaments dels matemàtics decimonònics Augustus De Morgan, George Boole i Gottlob Frege, entre d'altres. Llurs treballs recolliren, perfeccionaren i completaren amb eines matemàtiques la lògica d'arrel aristotèlica i obtingueren allò que habitualment anomenem *lògica clàssica*, és a dir, l'estudi del raonament correcte amb proposicions per les quals val el principi de bivalència.

A partir d'aquí, la Lògica, que tradicionalment s'havia considerat una subdisciplina de la Filosofia, passà a ser també una branca de la Matemàtica amb el nom de *Lògica Matemàtica*. De fet, es tracta d'una disciplina que pot ser considerada matemàtica per un doble motiu. En primer lloc, perquè com hem dit es desenvolupa amb metodologia i eines purament matemàtiques. Per exemple, les proposicions es formalitzen com a seqüències ordenades de símbols anomenades *fórmules*, els raonaments són seqüències ordenades de fórmules, les teories són conjunts de fórmules i el significat de les fórmules consisteix a donar-los valors en una estructura algèbrica de dos elements, anomenada *àlgebra de Boole*, en què els nombres 0 i 1 corresponen al fals i al ver respectivament. En segon lloc, aquesta lògica és matemàtica perquè l'adopció del principi de bivalència com a postulat bàsic la fa especialment apta per a l'estudi del raonament correcte que es fa en el discurs matemàtic. En efecte, el principi de bivalència només admet dos tipus de proposicions: aquelles que són vertaderes i aquelles que són falses; les separa categòricament i no admet cap altra possibilitat, és a dir, qualsevol tercera possibilitat queda exclosa (això implica, en particular, el principi anomenat *el terç exclòs* segons el qual per tota proposició p, és veritat la proposició 'p o no p'). És difícil trobar un camp del coneixement humà en què aquest postulat s'hi adapti tan bé com a la Matemàtica, on ningú no dubta que qualsevol enunciat ben formulat en què tots els termes estiguin ben definits ha de ser necessàriament vertader o fals, i és impossible que no sigui ni una cosa ni l'altra o que sigui vertader i fals a la vegada.[1] Per tant, la lògica clàssica esdevingué l'eina ideal per formalitzar el tipus de raonament, paradigma de la precisió i el rigor, de la Matemàtica i fins i tot donà lloc a ambiciosos programes de fonamentació com el que impulsà David Hilbert (i que tancà de manera parcialment negativa Kurt Gödel). La Lògica no només s'havia fet matemàtica, sinó que també era *metamatemàtica* en la mesura que es tractava d'una matemàtica que s'estudiava a si mateixa.

Tanmateix, aquesta deriva històrica de la Lògica com a disciplina reguladora del raonament correcte no podia resultar del tot satisfactòria puix que portava a una dràstica reducció del camp d'aplicació. Es tractava d'una ciència que havia nascut per formalitzar i estudiar tot possible raonament correcte en qualsevol camp del coneixement, no només en la Matemàtica. D'altra banda, és ben sabut que moltes branques de les ciències i de les disciplines d'estudi no són tan matematitzades com d'altres, i algunes fins i tot no ho són gens ni ho poden ser, i malgrat tot pretenen legítimament ser disciplines rigoroses i fiables. Podem dir el mateix, en general, de molts tipus de discursos en què el llenguatge no usa els conceptes amb precisió matemàtica i no per això han de quedar desautoritzats com a formes de raonament inacceptable. La Lògica hauria d'estudiar en què consisteix l'argumentació correcta en qualsevol context i en qualsevol mena de discurs. Ara bé, també és ben cert que de seguida que hom s'allunya de la Matemàtica, la bivalència queda fàcilment en entredit a causa del problema de la vaguetat. En el llenguatge matemàtic tots els termes són precisos, ben delimitats (ben definits, dèiem més amunt) en el sentit que per qualsevol predicat (o sia, qualsevol propietat) és ben clar que hi ha una perfecta divisió entre els objectes als quals s'aplica i els que no.[2] En canvi, la gran majoria dels raonaments els fem en llenguatges no matemàtics plens de termes que denoten predicats vagues, no precisos, és a dir, predicats que no estableixen aquesta perfecta delimitació i per als quals hi ha objectes tals que no sembla que estigui determinat si compleixen o no el predicat. La ubiqüïtat de la vaguetat en el raonament humà la fa un fenomen ineludible no només per la Lògica, com ja hem justificat, sinó també per una altra disciplina altament compromesa amb les capacitats racionals humanes: la Intel·ligència

[1] Observem que la bivalència dels enunciats és independent del fet que es conegui efectivament per un enunciat concret si és vertader o fals. Prenguem com a exemple la cèlebre conjectura de Goldbach segons la qual tot nombre parell és la suma de dos nombres primers. Es tracta d'una proposició que, malgrat la seva antiguitat, no ha estat encara demostrada ni refutada, és a dir, no sabem si és vertadera o falsa. Tanmateix, la bivalència s'hi aplica igualment i els matemàtics en general no dubtem que és o bé vertadera o bé falsa, tot i que és possible que mai no puguem arribar a resoldre el problema.

[2] Aquí cal fer un comentari anàleg al de la nota anterior: no hem de confondre el fet que una propietat estableixi una perfecta divisió entre objectes, segons si la compleixen o no, amb el fet que donat un objecte concret sapiguem efectivament si la compleix. Per exemple, prenguem el predicat *nombre primer*. Donat un nombre arbitrari és ben clar que ha de ser primer o compost. Ara bé, si el nombre és prou gran en general no som capaços de saber quin dels dos casos es dóna.

Artificial. Aquesta branca de la Informàtica, en tant que persegueix l'objectiu d'elaborar dispositius que efectuin tota mena de tasques que normalment requereixen les nostres habilitats intel·lectuals, necessita, en particular, elaborar sistemes de representació del coneixement i d'argumentació correcta que emulin, o àdhuc millorin, l'activitat epistemològica humana en els diversos contextos en què actua. Es fa, per tant, imprescindible un tractament del problema de la vaguetat en el raonament amb un doble objectiu: (1) obtenir una explicació acurada del fenomen que safisfaci les exigències teòriques de la Lògica tot aclarint en què consisteix l'argumentació correcta en presència de termes vagues i, (2) en el pla aplicat, aconseguir mètodes efectius que permetin implementar aquest tipus de raonament en els sistemes intel·ligents que elabora la Intel·ligència Artificial.

En aquest article presentarem el problema lògic de la vaguetat i les paradoxes que genera. A continuació comentarem breument les diverses explicacions que n'ha donat la Filosofia Analítica (la branca de la Filosofia contemporània metodològicament més compromesa amb la Lògica) i llurs limitacions, i defensarem la Lògica Borrosa com a apropament matemàtic al problema que té l'avantatge d'oferir-ne un tractament útil per a la Intel·ligència Artificial.

2 La lògica clàssica i el problema de la vaguetat

Una de les grans fites assolides per la lògica clàssica contemporània ha estat la d'haver determinat amb precisió què és un argument lògicament correcte. Per repassar-ne la definició haurem d'introduir, encara que no sigui amb tota formalitat, uns quants elements de la teoria.[3] Per simplificar l'exposició ens limitarem al formalisme lògic d'ordre 0 o proposicional, és a dir, aquell nivell en què no es permet encara la quantificació sobre els objectes de l'univers de discurs. Suposem, doncs, que per formalitzar les proposicions usem el llenguatge $\mathcal{L}_c$ amb les *connectives* $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$ i $\leftrightarrow$ per representar respectivament la conjunció, la disjunció, la negació, la implicació i l'equivalència, i amb un conjunt infinit numerable de *variables* V, que representen les proposicions atòmiques, indescomposables. El conjunt de totes les *fórmules proposicionals* de la lògica clàssica, que denotem $Fm_{\mathcal{L}_c}$, s'obté per aplicació de les següents regles:

- Si $x \in V$, llavors $x \in Fm_{\mathcal{L}_c}$.
- Si $\varphi \in Fm_{\mathcal{L}_c}$, llavors $\neg\varphi \in Fm_{\mathcal{L}_c}$.
- Si $\varphi, \psi \in Fm_{\mathcal{L}_c}$, llavors $(\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi) \in Fm_{\mathcal{L}_c}$.

No hi ha més fórmules que aquelles que s'obtenen en aplicar un nombre finit de vegades les regles anteriors. Fixem-nos que aquesta definició del conjunt de fórmules que hem donat pel llenguatge de la lògica clàssica la podríem repetir de manera totalment anàloga per qualsevol altre llenguatge proposicional $\mathcal{L}$ amb una col·lecció diferent de connectives.

L'àlgebra de Boole de dos elements, que denotem $\mathcal{B}_2$, és una estructura algèbrica definida sobre el conjunt $\{0, 1\}$ amb unes operacions especialment pensades per interpretar matemàticament el llenguatge $Fm_{\mathcal{L}_c}$ (denotem amb el mateix símbol l'operació i la connectiva que interpreta) donades per les següents taules:

$\neg$	
0	1
1	0

[3] El lector interessat a aprofundir-hi pot consultar un manual clàssic com ara [37, 100], o en català [124].

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\leftrightarrow$	0	1
0	1	0
1	0	1

Una *valoració* d'una fórmula $\varphi \in Fm_{\mathcal{L}_c}$ consisteix a donar a cada variable de φ un valor de $\{0, 1\}$ segons una funció de valoració e i a continuació calcular el valor de tota la fórmula segons les operacions de $\mathcal{B}_2$. Per exemple, suposem que $\varphi = ((p \wedge \neg q) \rightarrow q)$ i prenem la valoració e que fa $e(p) = 1$ i $e(q) = 0$, aleshores el valor de la fórmula és $e(\varphi) = (1 \wedge \neg 0) \rightarrow 0 = 1 \rightarrow 0 = 0$. Diem que una fórmula qualsevol φ és *vertadera* en una valoració e si $e(\varphi) = 1$, i diem que és *falsa* en aquesta valoració si $e(\varphi) = 0$. Observem que d'aquesta manera queda implementat el principi de bivalència, car les fórmules han de prendre sempre un d'aquests dos valors.

Aquestes definicions tan elementals són suficients per formular la noció matemàtica de raonament lògicament correcte.

Definició 2.1. *Donats un conjunt $\Gamma \subseteq Fm_{\mathcal{L}_c}$ de fórmules i una fórmula $\varphi \in Fm_{\mathcal{L}_c}$ diem que φ és* conseqüència lògica *de Γ, i ho denotem $\Gamma \models_c \varphi$, si per tota valoració e tal que $e(\gamma) = 1$ per tota $\gamma \in \Gamma$, tenim que $e(\varphi) = 1$. Es diu que una fórmula φ és una* tautologia *si $\emptyset \models_c \varphi$, és a dir, si per tota valoració e tenim que $e(\varphi) = 1$.*

Hem establert, doncs, que una fórmula φ és conseqüència d'un conjunt Γ si tota interpretació que fa vertaderes les fórmules de Γ també ha de fer vertadera φ o, dit al revés, si és impossible interpretar el llenguatge de tal manera que les fórmules de Γ siguin vertaderes i, en canvi, φ sigui falsa. Si ara formalitzem el raonaments com a seqüències ordenades de fórmules, obtenim la definició de raonament lògicament correcte:

Definició 2.2. *Siguin $\psi_1, \ldots, \psi_n, \varphi \in Fm_{\mathcal{L}_c}$. Diem que $\langle \psi_1, \ldots, \psi_n, \varphi \rangle$ és un* raonament lògicament correcte *si $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \models_c \varphi$. En aquest cas diem que $\psi_1, \ldots, \psi_n$ són les* premisses *del raonament i φ n'és la* conclusió.

Sovint representarem gràficament un argument d'aquesta manera:

$$\begin{array}{c} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_n \\ \hline \varphi \end{array}$$

Així queda precisada essencialment (només faltaria ampliar les definicions per permetre llenguatges més rics amb quantificacions universals i existencials) la noció d'argumentació correcta en aquells contextos en què val el principi de bivalència, en particular, en la Matemàtica. L'estudi sistemàtic de la lògica clàssica ha permès descriure l'estructura formal d'una bona colla d'arguments que apareixen constantment en les demostracions que pensa i escriu el matemàtic. Vegem-ne un, a tall d'exemple, que ben aviat haurem de tornar a considerar. Es tracta del *Modus Ponens* (del qual encara en conservem el nom que li donaren els lògics medievals):

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi \\ \varphi \to \psi\end{array}}{\psi}$$

Una simple inspecció de les definicions anteriors i de l'operació $\to$ de l'àlgebra de Boole ens convenç de la correcció del Modus Ponens.

Tanmateix, la Lògica no s'ha conformat a donar simplement aquesta explicació *semàntica* (és a dir, basada en la interpretació dels enunciats com a vertaders o falsos) de la noció d'argument correcte, sinó que també n'ha cercat una explicació *sintàctica*, més basada en regles formals d'escriptura. Aquesta aproximació sintàctica s'inspira en l'activitat que fa el matemàtic quan, per demostrar un teorema a partir de certes hipòtesis, es limita a escriure'n una demostració formal segons certes regles d'inferència. Així, la Lògica ha desenvolupat, paral·lelament al plantejament semàntic que ja hem explicat, un estudi de la conseqüència lògica basat en la noció de *demostració*. Aquesta noció admet diverses formalitzacions, cadascuna amb el seus avantatges i inconvenients, l'estudi de les quals constitueix tota una branca de la Lògica Matemàtica: l'anomenada *Teoria de la Prova*. Vegem-ne, com a exemple, la formalització en *sistemes de demostració a l'estil de Hilbert*.[4]

Definició 2.3. *Un* sistema formal *o* càlcul d'estil Hilbert *de nivell proposicional és una terna* $\mathcal{H} = \langle \mathcal{L}, AX, REG \rangle$ *en què* $\mathcal{L}$ *és un llenguatge proposicional,* $AX \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ *és un conjunt de fórmules anomenades* axiomes *i* $REG \subseteq Fm_{\mathcal{L}}^{<\omega}$ *és un conjunt de successions finites de fórmules*[5] *anomenades* regles d'inferència.

Definició 2.4. *Donat un càlcul d'estil Hilbert* $\mathcal{H} = \langle \mathcal{L}, AX, REG \rangle$*, un conjunt* $\Gamma \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ *i una fórmula* $\varphi \in Fm_{\mathcal{L}}$ *diem que una successió finita* $\langle \psi_1, \ldots, \psi_n \rangle$ *de fórmules de* $Fm_{\mathcal{L}}$ *és una* demostració de φ a partir de Γ *si:*

- $\varphi = \psi_n$ *(φ és la conclusió de la demostració)*
- *Per tot* $i \in \{1, \ldots, n-1\}$*, es compleix una d'aquestes tres possibilitats:*
  1. $\psi_i \in \Gamma$ *(ψ_i és una premissa)*
  2. $\psi_i \in AX$ *(ψ_i és un axioma)*
  3. *existeix* $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_k \rangle \in REG$ *tal que* $\psi_i = \alpha_k$ *i* $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}\} \subseteq \{\psi_1, \ldots, \psi_{i-1}\}$ *(ψ_i és el resultat d'aplicar una regla a fórmules anteriors de la demostració)*

Per tant, fer una demostració d'una fórmula a partir d'unes premisses consisteix a escriure una successió de fórmules que acabi amb la que es pretén demostrar i en què sempre s'hi poden col·locar premisses i axiomes (fórmules que s'accepten com a vertaderes i per a les quals no cal demostració) i aplicar a voluntat regles d'inferència a les fórmules que ja han aparegut a la demostració per poder-ne obtenir de noves.

Com a càlcul d'estil Hilbert per a la lògica clàssica podem prendre $\mathcal{H}_c = \langle \mathcal{L}_c, AX_c, REG_c \rangle$ en què els axiomes AX_c són:

(C1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(C2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

[4] S'anomenen així perquè generalitzen la proposta que féu David Hilbert en el marc del seu programa formalista de fonamentació de la Matemàtica.

[5] $Fm_{\mathcal{L}}^{<\omega}$ denota el conjunt de totes les successions finites de fórmules en el llenguatge $\mathcal{L}$.

(C3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to ((\neg\psi \to \varphi) \to \psi)$

i l'única regla d'inferència a REG_c és el Modus Ponens, és a dir:
$REG_c = \{\langle \varphi, \varphi \to \psi, \psi \rangle\}$.[6]

Definició 2.5. *Donats un conjunt $\Gamma \subseteq Fm_{\mathcal{L}_c}$ de fórmules i una fórmula $\varphi \in Fm_{\mathcal{L}_c}$ diem que φ és* demostrable *a partir de Γ, i ho denotem $\Gamma \vdash_c \varphi$, si existeix una demostració de φ a partir de Γ en el sistema $\mathcal{H}_c$. Es diu que una fórmula φ és un* teorema *si $\emptyset \vdash_c \varphi$.*

Tot això tindrà sentit si els dos plantejaments, el semàntic i el sintàctic, capten una mateixa noció d'argument correcte. Per tant, cal demostrar que una fórmula és conseqüència lògica d'un conjunt de premisses si, i només si, és demostrable a partir d'aquestes premisses. Aleshores podrem dir que hem donat un càlcul que es correspon exactament a la lògica que havíem definit semànticament, és a dir, un càlcul *correcte* (perquè només demostra allò que és conseqüència lògica) i *complet* (perquè demostra tot allò que és conseqüència lògica). I efectivament és així:

Teorema 2.6. *El càlcul d'estil Hilbert $\mathcal{H}_c$ és correcte i complet*[7] *per la lògica clàssica, és a dir, per tot conjunt $\Gamma \subseteq Fm_{\mathcal{L}_c}$ de fórmules i tota fórmula $\varphi \in Fm_{\mathcal{L}_c}$ tenim que: $\Gamma \vdash_c \varphi$ si, i només si, $\Gamma \models_c \varphi$.*

Vegem ara què passa quan abandonem la precisió de la Matemàtica i ens disposem a tractar llenguatges poc o gens matemàtics com ara el llenguatge natural que utilitzem quotidianament per comunicar-nos. Per exemple podem raonar d'aquesta manera: "Un home que no té ni un euro és pobre. Si un home pobre guanya un euro, continua sent pobre. Per tant, un home que té un milió d'euros és pobre". Aquest pressumpte argument amb una conclusió tan absurda (malgrat que per un moment ens pugui alegrar pensar que hem demostrat que no hi ha rics al món) ens fa tota la impressió de ser una bajanada, una fal·làcia, quelcom que no hauria de complir la definició anterior d'argument correcte. Analitzem-ho amb calma per veure si realment és així. Per tractar-lo amb les eines de la lògica primer l'hem de formalitzar. Sigui p_n la proposició atòmica que significa "un home que té exactament n euros és pobre". Així la primera frase de l'argument correspon a la proposició p_0, mentre que la darrera correspon a $p_{1000000}$. La segona, en canvi, és un xic més complicada. Intuïtivament, és una proposició universal que parla de totes les situacions en què hom augmenta el seu patrimoni en un euro. És a dir, afirma de cop totes les implicacions $p_i \to p_{i+1}$. Per tant, queda formalitzada a través de la sèrie de fórmules $p_0 \to p_1$, $p_1 \to p_2$, etc. Així l'argument té aquesta forma:

$$\begin{array}{l} p_0 \\ p_0 \to p_1 \\ p_1 \to p_2 \\ p_2 \to p_3 \\ \vdots \\ p_{999999} \to p_{1000000} \\ \hline p_{1000000} \end{array}$$

[6] Cal llegir, aquí i en tots els exemples de sistemes de demostració que presentarem més endavant, tant els axiomes com la regla d'inferència de manera *esquemàtica*, o sia, com a expressions en què les lletres gregues respresenten fórmules arbitràries.

[7] Quan s'enuncien teoremes anàlegs a aquest per altres lògiques no clàssiques sovint s'omet la correcció del càlcul, la qual es comprova trivialment i es dóna per descomptada, i senzillament s'expressa el resultat tot dient que el càlcul és complet per la lògica. Per això, també, un resultat d'aquest tipus normalment s'anomena *teorema de completesa*.

Tothom està d'acord que p_0 és vertadera i $p_{1000000}$ és falsa. També sembla vertadera aquesta afirmació que diu que quan el pobre guanya un sol euro més continua pobre, és a dir, totes les implicacions $p_i \rightarrow p_{i+1}$ semblen vertaderes. D'altra banda fixem-nos que es tracta ni més ni menys que d'una aplicació reiterada un milió de vegades del Modus Ponens i, per tant, l'argument és correcte segons les definicions anteriors. I tanmateix les premisses són veritat i la conclusió és falsa, situació que no es pot donar en un argument correcte (!). Tenim, doncs, una paradoxa. Una paradoxa que ja descobriren els grecs i que anomenaren *paradoxa dels sorites*.[8]

Observem que el problema no rau en cap particularitat exclusiva del predicat *pobre*. Podem generar paradoxes anàlogues amb altres predicats com ara *alt*, *calb*, *jove*, *calent* o *roig*, perquè per totes aquestes propietats tenim objectes que clarament les satisfan i objectes que clarament no les satisfan i, a més, podem enunciar implicacions del tipus "si un home és alt, també ho seria si fos només un mil·límetre més baixet" que semblen vertaderes. Tot plegat permet construir per cadascun una nova paradoxa dels sorites. De fet, pràcticament tots els predicats que usem en gairebé tots els àmbits de discurs són d'aquest tipus. D'aquests predicats en diem *vagues*. Ultra llur capacitat generadora de paradoxes dels sorites en podem donar una altra caracterització ben il·luminadora: un predicat és vague si, i només si, hi pot haver objectes pels quals ens resulta del tot impossible, perquè no sembla que estigui determinat, dir si satisfan el predicat o no. D'aquests objectes en diem *casos fronterers*.

Prenem el predicat *alt* com a exemple. No hauria de ser difícil convèncer-nos que hi pot haver (i, de fet, hi ha) individus pels quals no està determinat si són alts o no. Hom podria replicar que tot aquest embolic rau senzillament en el fet que una propietat com la de ser alt és ambígua i pot prendre diversos significats en diversos contexts. Què vol dir ser alt? No és el mateix si estem parlant d'individus d'una ètnia pigmeu que si estem parlant de jugadors professionals de bàsquet o d'infants d'una certa edat. És cert que hi ha aquest factor d'ambigüitat, però la vaguetat és una altra cosa. En efecte, per tal que no ens destorbi podem eliminar tota possible ambigüitat si fixem un context concret; llavors veurem com la vaguetat persisteix. Diguem, per exemple, que estem parlant de la població masculina adulta catalana contemporània i de l'alçada dels seus individus. És clar que hi ha individus que satisfan el predicat com ara alguns homes que medeixen 2.1 metres o 1.98 metres, per exemple. També hi ha individus que no el satisfan, que definitivament no són alts, com ara tots aquells que fan 1.65 metres. Ara bé, és alt un individu d'aquest conjunt que faci 1.79 metres? Qui podria donar una resposta inequívoca a aquesta pregunta?

En enfrontar-se a aquesta qüestió per primera vegada és difícil evitar de caure en la temptació de liquidar de cop el problema tot afirmant que es tracta simplement d'una manca de definició del predicat. Sembla que si ens trobem en aquesta enutjosa situació és senzillament perquè no hem aclarit d'entrada el significat d'*alt*. Només cal que ens posem d'acord per estipular-ne una definició i la vaguetat s'esvairà. Diguem que són alts exactament aquells individus amb una alçada igual o superior a 1.81 metres i el problema estarà resolt. Així ja no hi haurà casos fronterers ni tampoc paradoxa dels sorites car alguna de les premisses de l'argument serà falsa, per exemple una que digués "si un home de 1.81 metres és alt, llavors també ho és un home de 1.809 metres". En definir bé el predicat, el fem precís, el matematitzem, i certament eliminem tota la problemàtica de la vaguetat. Però, lamentablement, això no contesta la qüestió anterior. De fet, si pretenem respondre-la així, és que no l'hem entès. La qüestió era si amb el significat, sigui el que sigui, que *alt* té en el llenguatge quotidià que fem servir constantment per raonar, un individu de 1.78 metres és alt o no. I no serveix de res dir que amb un altre significat que puguem estipular és alt, o no ho és. Per tant, el problema

[8] Segons els testimonis que ens han arribat, sembla ser que el primer la formulà fou Eubúlides de Milet al segle IV a. C. en una versió que deia més o menys així: "Un sol gra de sorra no fa un piló de sorra. Si a un conjunt de grans que no fan un piló hi afegim un sol gra, continua no essent un piló. Per tant, cent mil milions de grans de sorra no fan un piló de sorra." *Piló* en grec antic es deia *soros* i d'aquí el nom de la paradoxa.

persisteix i si la Lògica (i la Intel·ligència Artificial) pretén entendre què vol dir raonar correctament en tots els contextos no el pot obviar.

D'altra banda, és important no confondre vaguetat i incertesa. Aquesta darrera apareix en contextos en què hi manca informació, la qual cosa pot provocar que es desconegui el valor de veritat d'algunes proposicions rellevants. Però això és conceptualment separable del fenomen de la vaguetat, ja que aquesta no desapareix encara que tinguem tota la informació pertinent. Per exemple, podem saber amb tota precisió les mides d'una persona i, en canvi, ser incapaços de determinar si és alta o no. Tradicionalment la incertesa s'ha tractat a través de la teoria de la Probabilitat. Per la vaguetat cal trobar algun altre tipus de tractament.

De fet, recentment la vaguetat ha estat al centre d'un intens debat en el camp de la Filosofia Analítica que ha generat diverses propostes de resolució del problema. A continuació les resumirem i comentarem molt breument.[9]

1. **Solució nihilista.** Els predicats vagues no tenen significat, car si en tinguessin les paradoxes dels sorites ens portarien a un absurd.

2. **Solució epistemicista.** La vaguetat és un problema d'ignorància. Tots els predicats tenen límits precisos, però en el cas dels predicats vagues no sabem on són aquests límits. Els casos fronterers són aquells pels quals no sabem, ni podem saber a causa de les nostres limitacions epistemològiques, si cauen o no sota l'abast del predicat.

3. **Solució supervaloracionista.** El significat d'un predicat vague és el conjunt de totes les maneres de fer-lo precís, anomenades *precisions*. Un objecte compleix un predicat vague si en satisfà totes les precisions,[10] mentre que no el compleix si no en satisfà cap precisió. Els casos fronterers són els casos restants, és a dir, aquells que compleixen algunes precisions i no en compleixen d'altres.

4. **Solució pragmatista.** Els predicats vagues (fins i tot quan s'ha fixat el context en què s'usen) no tenen un significat unívoc, sinó que depèn de quin ús es faci del llenguatge. Un llenguatge vague és, de fet, un conjunt de llenguatges precisos que recullen els possibles significats dels predicats vagues. Segons la pragmàtica, és a dir, les convencions implícites que regeixen la comunicació, els parlants usen en cada moment un predicat vague en un dels seus possibles significats precisos. El casos fronterers són aquells pels quals hi ha usos que els classifiquen afirmativament i usos que els classifiquen negativament.

La primera proposta, la nihilista, és ràpidament descartable perquè és del tot insatisfactòria. En lloc d'intentar resoldre el problema d'elucidar la semàntica i la lògica de la vaguetat es rendeix d'entrada i ho declara impossible. Així queda sense explicació el fet obvi que els humans aconseguim comunicar-nos i raonar a través d'un llenguatge ple de predicats vagues. Deixem córrer aquesta proposta. Les altres tres, en canvi, són intents seriosos de tractar el fenomen discutits per una bona colla d'autors que de moment no han arribat a cap acord sobre quina és la millor teoria. Fixem-nos que totes estan d'acord en diversos punts quan s'enfronten a la paradoxa dels sorites: la primera premissa és vertadera, la conclusió és falsa i l'argument és correcte, per tant, el problema ha de raure en alguna de les premisses restants (les de tipus $p_i \to p_{i+1}$). Totes aquestes propostes coincideixen a dir

[9] En presentar una teoria de forma massa abreujada hom sempre corre el risc de caricaturitzar-la o de donar-li un aspecte trivial que no tindria si fos explicada en tota la seva complexitat. En qualsevol cas, remetem el lector interessat a conèixer en tot detall les teories de la vaguetat a les monografies [94] i [137].

[10] La teoria exigeix que les precisions siguin *admissibles*, en el sentit que facin que el predicat s'apliqui a tots els casos que clarament el compleixen i no facin que s'apliqui a cap objecte que clarament no el compleix.

que alguna d'aquestes premisses és falsa, però discrepen en els motius. Segons l'epistemicista, com que el predicat té límits precisos hi ha un darrer i tal que p_i és vertader. Per tant, p_{i+1} és falsa i la fórmula $p_i \to p_{i+1}$ també ho és. És un proposta difícil d'empassar-se perquè xoca de ple amb algunes intuïcions bàsiques que tenim sobre la vaguetat (com ara que en els casos fronterers està indeterminat si el predicat s'hi aplica o no perquè realment té límits imprecisos; en particular sembla bastant increïble afirmar que hi ha un euro, no sabem quin, que diferencia el ric del pobre). Però també se li ha de reconèixer a l'epistemicista l'audàcia de defensar una posició d'entrada xocant que té l'avantatge de preservar completament la lògica clàssica.

Les dues teories restants són variacions d'una mateixa idea:[11] els significats vagues s'expliquen a partir d'una col·lecció de significats precisos. Ambdues teories diuen que els casos fronterers provenen de la possibilitat de classificar-los diferentment en diverses maneres de fer precís el predicat. Per exemple, l'home de 1.79 metres d'alçada és un cas fronterer perquè *alt* es pot fer precís posant el tall a 1.82 metres i també posant-lo a 1.785 metres. El supervaloracionista diu que la veritat d'un enunciat vague és la *superveritat*, és a dir, ser veritat per tota precisió dels termes. Hi ha enunciats que no són supervertaders ni superfalsos, ja que algunes precisions els fan vertaders i d'altres no. Per tant, es tracta de propostes que coincideixen amb l'epistemicisme a dir que hi ha premisses $p_i \to p_{i+1}$ que no són vertaderes, però ho fan en un context de rebuig de la bivalència i que, per tant, revisa en part la lògica clàssica.

Totes aquestes teories pretenen donar una explicació fidedigna del fenomen de la vaguetat, que descrigui quines són realment la lògica i la semàntica que ens permeten raonar en presència de vaguetat. Cadascuna ho aconsegueix a la seva manera i amb uns resultats teòricament més o menys satisfactoris.[12] Tanmateix totes tenen un important inconvenient d'ordre pràctic i és que no ofereixen mètodes efectius per implementar el raonament amb vaguetat. L'epistemicisme és evident que no ho fa, ja que es queda en la postulació teòrica de l'existència d'uns límits desconeguts del predicat. En efecte, assumim la hipòtesi epistemicista i suposem que hem de programar un sistema que raoni amb un predicat vague. Aleshores, com que la hipòtesi ens diu que aquest predicat té un límits precisos, bé els haurem de col·locar en algun lloc. Però la teoria no ens podrà dir on, ans el contrari, puix que els declara incognoscibles. Tampoc un plantejament de tipus supervaloracionista seria de gaire més ajuda, ja que en avaluar la veritat d'un enunciat que conté un predicat vague haurem de tenir en compte totes les precisions que se'n poden fer. Però com es calcula el conjunt de totes les precisions? Si prenem un cas concret, el predicat *alt* de nou, veurem que això és impossible a la pràctica. Per exemple, posar el tall a 1.82 metres és una precisió admissible ja que no fa que sigui alt cap dels individus que definitivament no ho són; en canvi, no seria admissible posar-lo a 1.63 metres perquè faria alts els de 1.65 metres i això no pot ser. Per tant, en quin punt entre 1.82 i 1.63 hem de parar de definir precisions admissibles?[13] No ho sabem. Resulta impossible, per tant, calcular-les efectivament totes i així ens quedem sense poder implementar en general sistemes que raonin a la manera del supervaloracionisme.

3 La Lògica Borrosa

Tanmateix, en el debat sobre la vaguetat s'hi ha proposat també un altre tipus de solució que volgudament hem exclòs de la llista anterior per tal de tractar-la ací amb més profunditat. Ens referim a

[11] De fet, des del supervaloracionisme s'ha defensat que tota posició pragmatista acceptable no és més que una reformulació del supervaloracionisme. Vegeu-ho a [94, Capítol 6].

[12] En particular, arriben a explicar el complex fenomen de la vaguetat d'ordre superior que aquí estem ometent per manca d'espai.

[13] Aquesta qüestió ens remet a l'esmentat fenomen de la vaguetat d'ordre superior que hem decidit no desenvolupar aquí.

un conjunt de propostes que es basen en la següent intuïció: el problema de les paradoxes dels sorites és que hi apareix un predicat vague que provoca que la veritat dels p_i de les premisses vagi disminuint fins arribar a una conclusió completament falsa. Què vol dir això? Ho entendrem més fàcilment a partir de l'exemple anterior sobre pobres i rics. La fórmula p_0 (un home que té exactament zero euros és pobre) no ofereix cap mena de dubte: és vertadera. Diguem, de fet, que és *completament vertadera*. Tampoc ens fa dubtar $p_{1000000}$ (un home que té exactament un milió d'euros és pobre): és falsa, *completament falsa*. Entre l'una i l'altra tenim una llarga col·lecció de fórmules (un milió) que expressen proposicions cada vegada menys vertaderes. Si p_0 és completament vertadera, podem dir que p_1 pràcticament també ho és, però una miqueta menys, p_2 encara una miqueta menys, i així anem baixant de grau de veritat fins arribar a la falsedat absoluta que expressa $p_{1000000}$. És a dir, en aquest plantejament es considera que *la veritat és qüestió de grau*. Cada proposició té un cert grau de veritat comprès entre el totalment vertader i el totalment fals. Així, aquesta proposta està d'acord amb la solució supervaloracionista pel que fa a refusar el principi de bivalència, però ara aquest refús pot anar més enllà. Mentre que els supervaloracionistes només admeten tres tipus de proposicions: les vertaderes (supervertaderes, segons la seva terminologia), les falses (superfalses) i les que no són ni una cosa ni l'altra, ara es permet que hi pugui haver tantes categories com es vulgui entre la veritat total i la falsedat total.[14] Metafòricament podríem dir que en aquest plantejament es supera la categorització clàssica, que ho veu tot de color blanc o negre, de tal manera que ara entre l'un i l'altre s'admet tota una gamma de grisos.

No estem parlant, però, de simples intuïcions o d'una teoria filosòfica que es quedi al nivell de l'especulació sobre certs principis inconcrets, sinó que es tracta d'una proposta completament matematitzable. El pas fonamental cap a aquesta matematització el donà Lotfi Zadeh el 1965 quan proposà a [138] la modelització dels predicats vagues com a conjunts borrosos, és a dir, conjunts als quals els objectes hi pertanyen en un cert grau. Formalmet, un conjunt borrós és un parell $\langle X, \mu\rangle$ on X és un conjunt (en el sentit clàssic) i $\mu : X \to [0,1]$ és una funció (anomenada *funció de pertinença*) que envia cada objecte $x \in X$ a un nombre real $\mu(x)$ entre 0 i 1, que s'interpreta com el grau de pertinença de l'objecte al conjunt borrós.[15] Per exemple, pel predicat vague *alt* al qual ens hem referit anteriorment, hom pot definir un conjunt borrós format per $X := [0.3, 2.4]$ (el conjunt de les possibles alçades en metres) i la funció de pertinença:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1.2, \\ \frac{5}{3}x - 2 & \text{si } 1.2 \leq x \leq 1.8, \\ 1 & \text{si } x \geq 1.8. \end{cases}$$

Aquest conjunt borrós modela *alt* de tal manera que els individus amb una alçada superior a 1.8 metres són alts del tot (alts en grau 1), els que fan menys de 1.2 metres no són alts en absolut (alts en grau 0) i els individus amb alçades intermitges tenen la propietat en un grau que varia linealment de 0 a 1. D'aquí podem passar als graus de veritat de les proposicions tot estipulant que si un individu a de l'univers de discurs té alçada $x \in X$, aleshores la proposició 'a és alt' és vertadera en grau $\mu(x)$.[16]

[14]Cal dir, emperò, que les primeres solucions al problema de la vaguetat basades en alguna teoria de graus de veritat tot just es mantenien en un plantejament trivalorat (vegeu-ne una exposició històrica a [137, Capítol 4]). Ara bé, ja eren plantejaments completament diferents del supervaloracionista ja que en lloc d'una semàntica de precisions oferien taules de veritat per interpretar les fórmules en què, a diferència de les taules bivalorades de la lògica clàssica, s'hi usaven tres valors de veritat.

[15]Fixem-nos que aquesta definició generalitza d'una manera natural els conjunts clàssics puix que, com sap tothom, un conjunt clàssic es pot identificar amb la seva funció característica, és a dir, una funció de l'univers a $\{0,1\}$.

[16]Aquí és important recordar de nou l'advertiment que fèiem més amunt: cal no confondre vaguetat i incertesa. Encara que l'assignació de graus veritat a $[0,1]$ a través d'una funció de pertinença ens pugui recordar l'assignació de probabilitats,

Tanmateix, si ens prenem seriosament la proposta de modelar els predicats vagues amb conjunts borrosos, caldrà que tinguem alguna manera de combinar aquests conjunts car bé haurem de considerar proposicions en què els predicats es combinin a través de disjuncions, conjuncions, negacions i d'altres connectives lògiques habituals. Per exemple, per tenir una forma de donar valors de veritat a la conjunció de dos predicats vagues, P i Q, podem considerar sengles conjunts borrosos que els modelin, $\langle X, \mu_P \rangle$ i $\langle X, \mu_Q \rangle$, i prendre una funció binària tal que per qualsevol $x \in X$ calculi el grau en què x té la conjunció de P i Q a partir de $\mu_P(x)$ i $\mu_Q(x)$. És a dir, es tracta de calcular la funció de pertinença de la intersecció de dos conjunts borrosos tot aplicant punt a punt una certa funció binària a les respectives funcions de pertinença. Igualment, caldrà una altra funció binària per la unió i una funció unària pel complement. A tal efecte Zadeh proposà les funcions $\min\{x, y\}$, $\max\{x, y\}$ i $1 - x$ respectivament per la intersecció, la unió i el complement de conjunts borrosos. Així, per exemple, tindríem que $\mu_{P\wedge Q}(x) = \min\{\mu_P(x), \mu_Q(x)\}$.

El 1969 Goguen anà més enllà i mostrà a [73] que els conjunts borrosos podien també resoldre la paradoxa dels sorites. Però per fer-ho necessità unes funcions de combinació diferents d'aquelles que havia proposat Zadeh: les funcions de veritat que Jan Łukasiewicz havia introduït per certes lògiques multivalorades (lògiques amb una semàntica que utilitza més de dos valors de veritat). Per tant, abans de prosseguir amb el tractament de la vaguetat de Goguen, caldrà que ens aturem un moment a examinar les lògiques de Łukasiewicz.

Fou Łukasiewicz, de fet, qui introduí la primera lògica multivalorada de la història[17] el 1920 a [97]. Era una lògica de tres valors ideada per motius aliens a la problemàtica de la vaguetat. Allò que volia tractar era la qüestió dels futurs contingents. Segons Łukasiewicz el principi de bivalència implica un determinisme molt fort, ja que ens força a acceptar que totes les proposicions són o bé vertaderes o bé falses, àdhuc aquelles que parlen sobre fets del futur que encara no s'han esdevingut. En aquest sentit, segons la bivalència, sembla que ja hauria d'estar determinat tot allò que succeïrà en el futur. En lloc d'això, troba més raonable afirmar que hi ha proposicions que de moment no són vertaderes ni falses i els assigna un nou valor de veritat que anomena *possible*. Si $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ és el conjunt dels tres valors de veritat (0 pel fals, $\frac{1}{2}$ pel possible i 1 pel ver), Łukasiewicz defineix les connectives lògiques d'implicació i negació a través d'aquestes taules:

$\rightarrow$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

	$\neg$
0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	0

Observem que els valors clàssics, 0 i 1, es comporten com a la lògica clàssica i que només ha calgut afegir-hi el comportament de $\frac{1}{2}$. El significat d'aquesta ampliació de les taules es pot entendre bastant bé amb la següent idea: suposem que V i F són els valors de veritat clàssics, i que els tres valors de Łukasiewicz indiquen els valors (clàssics) pot prendre una proposició. Mentre que $0 = \{F\}$ i $1 = \{V\}$ corresponen a les proposicions de valor de veritat totalment determinat, les proposicions *possibles* són les que poden prendre en el futur tant el valor F com el V, i per tant els podem assignar un valor intermedi $\frac{1}{2} = \{V, F\}$. Aleshores, una manera de calcular una entrada de la taula per als valors d'una proposició composta seria anar fent totes les combinacions possibles entre els valors possibles de les components, tot suposant que V i F es comporten clàssicament. Per exemple, $\frac{1}{2} \rightarrow 1 = 1$ queda

es tracta de quelcom ben diferent. Mentre que la probabilitat representa el grau de plausibilitat o de confiança que atribuïm al fet que una proposició bivalorada (clàssica) sigui vertadera, la funció de pertinença ens diu quin grau de veritat assignem a una proposició vague.

[17] Volem dir que fou el primer a publicar un treball sobre una lògica multivalorada. Avui sabem que Charles Sanders Peirce en un manuscrit de 1909 ja havia desenvolupat independentment una lògica trivalorada, però no la féu pública.

justificat amb la igualtat $\{V,F\} \to \{V\} = \{V\}$, puix que segons la implicació clàssica $V \to V = V$ i $F \to V = V$. Hi ha, però, una excepció on aquesta interpretació falla: $\frac{1}{2} \to \frac{1}{2}$ hauria de ser $\frac{1}{2}$, però en canvi és 1. Aquesta irregularitat segurament l'explica el fet que Łukasiewicz volgués preservar la veritat de la llei d'identitat: $\varphi \to \varphi$.

El 1922 generalitza, com a exercici matemàtic que transcendeix ja la motivació inicial, la lògica trivalorada a una lògica n-valorada per cada $n \geq 4$, en què el conjunt de valors de veritat és $\{0, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{n-2}{n-1}, 1\}$ i les connectives es defineixen com

$$a \to b := \min\{1, 1 - a + b\} \tag{1}$$

$$\neg a := 1 - a \tag{2}$$

Finalment, el 1930 i amb Alfred Tarski (a [98]) fan servir aquestes funcions per definir una lògica infinito-valorada sobre l'interval real $[0,1]$. A més de la implicació i la negació, s'hi poden afegir altres connectives definides així: $a\&b := \neg(a \to \neg b)$, $a \vee b := (a \to b) \to b$ i $a \wedge b := \neg(\neg a \vee \neg b)$. Es calcula fàcilment que

$$a\&b = \max\{0, a + b - 1\} \tag{3}$$

$$a \vee b = \max\{a, b\} \tag{4}$$

$$a \wedge b = \min\{a, b\} \tag{5}$$

Així, algunes propietats de la conjunció clàssica queden repartides entre les dues noves connectives $\&$ i $\wedge$:

1. Per quassevol a, b i c, $a\&b \leq c$ sii $b \leq a \to c$ (llei de residuació)
2. Per qualssevol a i b, $a \to b = 1$ sii $a \wedge b = a$ sii $a \leq b$ ($\wedge = \min$)

Amb aquestes funcions de veritat de la lògica infinito-valorada de Łukasiewicz, Goguen assolí una nova solució a la paradoxa dels sorites. Vegem com funcionaria en la formulació que n'hem fet aquí. *Pobre* és un predicat vague i per tant interpretable amb un conjunt borrós. Considerem el conjunt clàssic $X = \{0, 1, 2, \ldots, 10^6\}$ (el conjunt de les possibles quantitats d'euros que pot tenir la persona de qui parlen les proposicions p_n) i usem-lo per definir un conjunt borrós $\langle X, \mu\rangle$ de tal manera que el valor de veritat de la proposició p_n serà el grau de pertinença $\mu(n)$. Havíem quedat que p_0 i p_{10^6} eren incontrovertiblement vertadera i falsa, respectivament. Per tant, fem que $\mu(0) = 1$ i $\mu(10^6) = 0$. Pels valors restants fem que la funció decreixi uniformement tot definint $\varepsilon = 10^{-6}$ i imposant que $\mu(n) = 1 - n\varepsilon$. Està clar que d'aquesta manera la primera premissa de la paradoxa és completament vertadera i la conclusió és completament falsa. Però, quin valor prenen les premisses restants? Prenguem qualsevol n i computem el valor de $p_n \to p_{n+1}$. Si la implicació s'interpreta a la manera de Łukasiewicz, aleshores $\mu(n) \to \mu(n+1) = 1 - \mu(n) + \mu(n+1) = 1 - (1 - n\varepsilon) + (1 - (n+1)\varepsilon) = 1 - \varepsilon < 1$. Tenim, doncs, que totes aquestes premisses prenen el mateix valor i que no són completament vertaderes, però s'hi acosten molt. Això resulta ben natural si recordem que les premisses $p_n \to p_{n+1}$ servien per formalitzar conjuntament una única proposició, "Si un home pobre guanya un euro, continua sent pobre", que intuïtivament és pràcticament vertadera. La paradoxa s'ha dissolt perquè ja no tenim que de premisses completament vertaderes se'n dedueixi, mitjançant un raonament correcte, una conclusió completament falsa. A més, amb aquesta explicació no tenim alguns dels aspectes contraintuïtius de les altres teories de la vaguetat. Ara no hem de suposar que hi ha alguna fórmula $p_n \to p_{n+1}$ que sigui falsa (com en la solució epistemicista) o que no tingui valor de veritat (com en la supervaloracionista), sinó que ara totes són quasi vertaderes, sense arribar a ser-ho del tot, la qual cosa explicaria per què ens sonen tan plausibles i estem en principi disposats a creure-les.

Una rèplica òbvia que es pot fer a la proposta de Goguen és que la tria del conjunt borrós i de l'operació d'implicació sembla totalment ad hoc i arbitrària. Què ens assegura que aquesta tria sigui la més fidel a la realitat? La reacció de la Lògica Borrosa a aquesta possible arbitrarietat ha estat mostrar que no estem obligats a fer una única tria, sinó que hi ha una amplíssima varietat de funcions que es poden usar per interpretar les connectives lògiques o, equivalentment, les operacions entre conjunts borrosos. Així, el següent pas en l'evolució que estem repassant consistí a observar quines són les propietats que cal requerir a una funció per poder fer tal paper. Per exemple, sembla natural requerir que les funcions per a la disjunció i la conjunció siguin associatives i commutatives, que la funció per a la conjunció tingui l'1 com a element neutre, o que la funció per a la disjunció tingui el 0 com a element neutre. Per tant, s'obrí una etapa en l'evolució de la Lògica Borrosa que essencialment consistí a cercar solucions a certs sistemes d'equacions funcionals que expressaven les condicions requerides a les connectives lògiques i en què des de finals de la dècada dels 70 hi tingueren un paper destacat una colla de matemàtics dels Països Catalans. En particular, a [7], Alsina, Trillas i Valverde proposaren per a la intersecció de conjunts borrosos (conjuncions de predicats vagues) una classe de funcions que havien aparegut en la teoria d'espais mètrics probabilístics (vegeu [129, 130]): les normes triangulars. Per a les unions (disjuncions de predicats vagues) proposaren llurs funcions duals, les conormes triangulars, i per als complements (negacions de predicats vagues) les anomenades *funcions de negació feble*, que ja havien estat estudiades a [132, 38] per Trillas, Esteva i Domingo. Vegem-ne les definicions tot seguit.

Definició 3.1. *Una funció $T : [0,1]^2 \to [0,1]$ és una* norma triangular, *o* t-norma *per més brevetat, si és associativa, commutativa, monòtona creixent a cada argument i té l'1 com a element neutre.*

És habitual usar una notació operacional del tipus $a * b$ en lloc de $T(a,b)$.

Definició 3.2. *Una funció $S : [0,1]^2 \to [0,1]$ és una* conorma triangular, *o* t-conorma *per més brevetat, si és associativa, commutativa, monòtona creixent a cada argument i té el 0 com a element neutre.*

Definició 3.3. *Una funció $N : [0,1] \to [0,1]$ és una* negació feble *si compleix que:*

1. $N(1) = 0$.
2. *Per qualssevol $a, b \in [0,1]$, si $a \leq b$, llavors $N(b) \leq N(a)$.*
3. *Per qualsevol $a \in [0,1]$, $a \leq N(N(a))$.*

Si en la darrera condició hi val la igualtat per tot element, es diu que N és una negació involutiva *o* forta.

Observem que aquestes classes contenen com a casos particulars les funcions proposades anteriorment: la conjunció $\&$ de Łukasiewicz i $\min$ són t-normes, $\max$ és t-conorma, i la funció $1 - x$ és negació involutiva.

Pel que fa a les implicacions, es proposaren dues famílies de funcions:

- **S-implicacions:** funcions binàries que es defineixen a partir d'una t-conorma S i una negació involutiva N fent $a \Rightarrow b := S(N(a), b)$.

- **R-implicacions:** funcions binàries que satisfan la llei de residuació respecte d'una t-norma. És a dir, si $*$ és una t-norma i $\Rightarrow$ és tal que

$$a * b \leq c \text{ sii } b \leq a \Rightarrow c \quad \text{per quassevol } a, b, c \in [0, 1] \tag{6}$$

llavors $\Rightarrow$ és R-implicació.

Les primeres són una manera natural de definir la implicació a partir de la disjunció i la negació tal com es fa a la lògica clàssica. Pel que fa a les R-implicacions, a [133] Trillas i Valverde justificaven que tenen l'avantatge d'oferir un bon tractament de la regla del Modus Ponens. Recordem-la:

$$\frac{\begin{array}{l}\varphi \\ \varphi \to \psi\end{array}}{\psi}$$

Suposem que x i y són els valors de veritat de φ i ψ, respectivament. Per funcionalitat, $x \Rightarrow y$ és el valor de $\varphi \to \psi$. Com que sovint no tindrem aquests valors exactes sinó aproximacions, el que pretenem és que a partir de fites inferiors de x i $x \Rightarrow y$, es pugui calcular una fita inferior de y, és a dir, calcular una fita inferior del valor de la conclusió de la regla a partir de fites inferiors dels valors de les premisses. A més, és natural requerir que com més alt sigui el grau de veritat de les premisses, més alt sigui també el de la conclusió. Podem prendre la conjunció de les premisses a través d'una t-norma $*$ puix que, com ja sabem, són monòtones creixents en ambdós arguments. D'altra banda, estem requerint que $x * (x \Rightarrow y) \leq y$ i que a més això també passi quan es prenen fites inferiors dels arguments. Per garantir-ho i fer que la regla sigui tan potent com es pugui, podem fer que $x \Rightarrow y$ prengui el màxim valor que satisfaci aquesta desigualtat, és a dir: $x \Rightarrow y := \max\{z \in [0, 1] : z * x \leq y\}$. És obvi que aquesta definició equival a requerir la llei de residuació (6). En aquest cas es diu que l'R-implicació $\Rightarrow$ és el *residu* de $*$, i es diu també que $*$ és una *t-norma residuada*. Fixem-nos que tota t-norma contínua és residuada. És el cas, per exemple, de les dues t-normes que hem vist fins ara: el mínim i la de Łukasiewicz. A partir d'ara les denotarem amb $*_{min}$ i $*_{Ł}$ (recordem que una mica més amunt havíem denotat $*_{Ł}$ amb $\&$), mentre que $\Rightarrow_{min}$ i $\Rightarrow_{Ł}$ seran llurs residus respectius. Un altre exemple senzill de t-norma contínua és el producte usual de nombres reals. El denotem amb $*_{\Pi}$ i el seu residu amb $\Rightarrow_{\Pi}$. Heus ací les expressions dels residus:

$$x \Rightarrow_{min} y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y, \\ y & \text{altrament.} \end{cases}$$

$$x \Rightarrow_{Ł} y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y, \\ 1 - x + y & \text{altrament.} \end{cases}$$

$$x \Rightarrow_{\Pi} y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y, \\ \frac{y}{x} & \text{altrament.} \end{cases}$$

Aquestes tres t-normes, a part de fornir-nos exemples elementals, esdevingueren molt rellevants per la Lògica Borrosa car el 1957 Mostert i Shields a [110] (i independentment Ling el 1965 a [96]) havien demostrat que tota t-norma contínua es pot obtenir a partir d'aquestes tres mitjançant una senzilla construcció anomenada *suma ordinal*. Per tant, $*_{min}$, $*_{Ł}$ i $*_{\Pi}$ són anomenades les *tres t-normes contínues bàsiques*.

A mitjans de la dècada dels 80 la teoria de conjunts borrosos havia assolit un nivell de desenvolupament que li permetia establir-se com a base matemàtica per un gran nombre d'aplicacions tecnològiques que d'alguna manera o altra havien de tractar amb la vaguetat o, més en general, amb la imprecisió.[18] Els conjunts borrosos modelaven els predicats imprecisos i tota una bateria de funcions estudiades permetien combinar-los adequadament, entre les quals les t-normes contínues gaudien de gran protagonisme com a bones modelitzacions de la conjunció i adequades per a la inferència amb Modus Ponens en tant que residuades. Es creia, malgrat que no s'havia demostrat, que la continuïtat era equivalent a la residuació car no es coneixia cap exemple de t-norma residuada no contínua. I no només creixien el nombre d'aplicacions basades en la teoria de conjunts borrosos, sinó que la teoria mateixa també s'engreixava a base de desenvolupar tota una *matemàtica borrosa* en què es permetia que tots els objectes tradicionals de la Matemàtica fossin *borrosos*, és a dir, tipus especials de conjunts borrosos que permetien flexibilitzar nocions tradicionalment precises. Així hom començà a parlar de *nombres borrosos*, *funcions borroses*, *relacions borroses*, etc., i cadascun d'aquests nous tipus d'objecte era justificat per mor de les aplicacions.

La Lògica Borrosa, a diferència de les altres propostes que hem comentat a la secció anterior, havia esdevingut un conjunt d'eines matemàtiques que permetien a la Intel·ligència Artificial una manipulació efectiva d'una part molt important del problema de la vaguetat, ja que permetia modelitzar i operar amb aquells predicats vagues que corresponen a conceptes graduals. Tanmateix, aquest estat de coses no podia satisfer encara les inquietuds dels lògics preocupats pel fenomen de la vaguetat i alhora receptius a les possibilitats dels conjunts borrosos com a tractament matemàtic del problema. Diem que no en podien estar satisfets perquè aquesta teoria encara no havia rebut una formulació acceptable des de la tradició de la Lògica Matemàtica. Tal com hem vist en el cas de la lògica clàssica, tot sistema lògic que pretengui pertànyer de ple dret al camp de la Lògica Matemàtica ha de ser presentat amb un llenguatge ben estipulat que permeti determinar amb tota precisió amb quines expressions formals es representen les proposicions i ha de tenir també una noció ben definida de conseqüència que permeti determinar quins són els arguments lògicament correctes. A més, cal que la noció de conseqüència admeti una descripció semàntica a partir d'alguna noció de veritat, i també una descripció sintàtica en forma de sistema de demostració (a l'estil de Hilbert o d'altres tipus). I el cas era que la teoria de conjunts borrosos l'havien desenvolupat investigadors provinents d'altres camps que simplement no s'havien ocupat de dotar llur teoria d'aquestes formalitats lògiques. Finalment, s'emprengué aquesta tasca i el gran artífex en fou el matemàtic txec, provinent de la tradició de la Lògica Matemàtica pura, Petr Hájek. En una sèrie d'articles que culminaren en el llibre [75] establí una ferma base sobre la qual s'erigí la Lògica Borrosa tal com l'entenem avui dia. Com veurem, també hi feren contribucions essencials alguns lògics matemàtics de casa nostra.

El primer pas en aquesta tasca no fou en realitat un nou desenvolupament dels lògics borrosos, sinó la redescoberta i reconeixement d'antics treballs del camp de les lògiques multivalorades com a immensament útils en aquesta empresa. Es tractava de recuperar els estudis que s'havien fet sobre les lògiques basades en dues de les t-normes bàsiques: $*_{Ł}$ i $*_{min}$. El primer cas és el de la lògica infinito-valorada de Łukasiewicz a la qual ja ens hem referit. Łukasiewicz i Tarski l'havien presentat a [98] de manera semàntica com la lògica en el llenguatge $\{\to, \neg\}$ (recordem que les connectives $\&, \wedge$ i $\vee$ eren definibles) en què les fórmules s'interpreten tot valorant les variables en l'interval real $[0, 1]$ i les connectives primitives s'interpreten segons les funcions $a \Rightarrow_{Ł} b := \min\{1, 1 - a + b\}$ i $\neg_{Ł} a := 1 - a$. La noció de veritat corresponia al valor 1 i la conseqüència lògica es definia com a preservació del valor 1, és a dir, φ és conseqüència lògica de Γ si per tota valoració e en $[0, 1]$ tal que $e(\gamma) = 1$ per tota $\gamma \in \Gamma$, tenim que $e(\varphi) = 1$.

[18] A grans trets podem dir que una informació és imprecisa si no és totalment descrita a partir de conceptes i mesures exactes. La vaguetat n'és el cas particular en què la inexactitud de la informació prové de l'ús d'algun predicat pel qual típicament hi poden haver casos fronterers.

De fet, això resulta ser un cas particular d'un procediment habitual per definir una lògica semànticament a partir d'una *matriu lògica*, és a dir, d'un parell $\langle \mathcal{A}, F \rangle$ en què $\mathcal{A}$ és una àlgebra de valors de veritat on s'interpreten les variables i amb funcions que interpreten les connectives, mentre que F és un subconjunt no buit de l'univers A de l'àlgebra que s'anomena *filtre*. D'entre els valors de veritat d'A, els d'F són els que es consideren *vertaders*. Aleshores la lògica es defineix així: $\Gamma \models_{\langle \mathcal{A}, F \rangle} \varphi$, si per tota valoració e en $\mathcal{A}$ tal que $e(\gamma) \in F$ per tota $\gamma \in \Gamma$, tenim que $e(\varphi) \in F$. Per tant, la lògica de Łukasiewicz és la donada per la matriu $\langle \langle [0,1], \Rightarrow_{\text{Ł}}, \neg_{\text{Ł}} \rangle, \{1\} \rangle$. Tenim, doncs, els dos primers requisits: llenguatge i presentació semàntica. Ens falta un sistema de demostració. Łukasiewicz ja era conscient d'aquesta mancança i intentà donar-ne un. De fet, proposà un sistema a l'estil de Hilbert amb aquests cinc axiomes:

(Ł1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
(Ł2) $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$
(Ł3) $((\varphi \to \psi) \to \psi) \to ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$
(Ł4) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$
(Ł5) $((\varphi \to \psi) \to (\psi \to \varphi)) \to (\psi \to \varphi)$

i Modus Ponens com a única regla d'inferència, i conjecturà que les tautologies de la seva lògica infinito-valorada coincidien amb els teoremes d'aquest càlcul. Però no aconseguí demostrar-ho. El 1935 Mordchaj Wajsberg afirmà que en tenia una demostració però mai no arribà a fer-la pública. Finalment la conjectura fou demostrada amb mètodes sintàctics el 1958 per Rose i Rosser a [127], i amb mètodes algèbrics el 1959 per Chang a [20, 21]. El mateix any Meredith mostrava a [101] que l'axioma (Ł5) era redundant puix que es podia demostrar a partir dels altres. I el 1963 Hay millorà el resultat de Rose, Rosser i Chang de la següent manera:

Teorema 3.4 ([86]). *Considerem el llenguatge $\{\to, \neg\}$. Sigui $\vdash_{\text{Ł}}$ la relació de demostrabilitat induïda pel càlcul d'estil Hilbert proposat per Łukasiewicz. Aleshores, per tot conjunt finit de fórmules $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ i tota fórmula φ tenim: $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \vdash_{\text{Ł}} \varphi$ si, i només si, $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \models_{\langle \langle [0,1], \Rightarrow_{\text{Ł}}, \neg_{\text{Ł}} \rangle, \{1\} \rangle} \varphi$.*

És a dir, no només els teoremes coincideixen amb les tautologies, sinó que també les demostracions coincideixen amb les consequències lògiques amb un nombre finit de premisses.

La segona redescoberta bibliogràfica correspongué a la lògica de la t-norma $*_{min}$. El 1932 Kurt Gödel, amb l'objectiu de demostrar que no es podia donar una semàntica completa finito-valorada per la lògica intuïcionista, havia considerat a [70] una família infinita de matrius finites linealment ordenades en què la conjunció s'interpretava com el mínim. El 1959 Dummett a [35] generalitzà les matrius de Gödel a una matriu linealment ordenada numerable i demostrà que la lògica associada era completa respecte d'un cert sistema de Hilbert que definí. Hájek anomenà aquest sistema *lògica de Gödel* i demostrà que correspon, de fet, a la lògica de la t-norma del mínim:

Teorema 3.5 ([75]). *Considerem el llenguatge $\{\&, \to, \overline{0}\}$ en què els dos primers símbols són connectives binàries de conjunció i implicació i el darrer és una constant (connectiva 0-ària) que significa la falsedat. Sigui G el sistema d'estil Hilbert definit per Dummett i sigui $\vdash_{\mathrm{G}}$ la relació de demostrabilitat que indueix. Aleshores, per tot conjunt Γ de fórmules i tota fórmula φ tenim: $\Gamma \vdash_{\mathrm{G}} \varphi$ si, i només si, $\Gamma \models_{\langle \langle [0,1], *_{min}, \Rightarrow_{min}, 0 \rangle, \{1\} \rangle} \varphi$.*

És interessant comentar que a G s'hi poden definir altres connectives així: $\varphi \vee \psi := ((\varphi \to \psi) \to \psi) \& ((\psi \to \varphi) \to \varphi)$ i $\neg\varphi := \varphi \to \overline{0}$. A diferència de la lògica Ł, aquí hi ha només una connectiva de conjunció ja que $\&$ s'interpreta com el mínim i, per tant, les dues conjuncions col·lapsen en una de sola.

Per tant, ja hi havia dues lògiques infinito-valorades ben definides que corresponien a sistemes de raonament amb vaguetat basats en t-normes contínues. Mancava, emperò, estudiar la lògica de la tercera t-norma contínua bàsica: $*_\Pi$. Aquesta tasca Hájek la realitzà juntament amb els catalans Godo i Esteva a [83] el 1996. En aquest article consideraren la lògica de la matriu $\langle\langle[0,1], *_\Pi, \Rightarrow_\Pi, 0\rangle, \{1\}\rangle$ i trobaren un càlcul a l'estil de Hilbert, anomenat Π, correcte i complet per les seves deduccions a partir de conjunts finits de premisses.

Quedà ben clar que quan es tractava de fornir bons fonaments segons la tradició de la Lògica Matemàtica, els sistemes de lògica borrosa no resultaven ser altra cosa que certs tipus de lògiques multivalorades. Calgué, doncs, distingir entre aquesta tasca i la que feia el gruix de la comunitat dels conjunts borrosos. A tal efecte, Zadeh, amb l'autoritat del fundador, proposà a [139] el binomi *lògica borrosa en sentit ampli* / *lògica borrosa en sentit restringit* en què el primer terme denota l'activitat anteriorment descrita en què els conjunts borrosos s'usen per fer tot tipus de *matemàtica borrosa* orientada a les aplicacions, mentre que el segon denota l'estudi dels fonaments, que estem explicant, com a part de les lògiques multivalorades. Tanmateix, el cas és que quan, dins i fora de les matemàtiques, hom parla de *Lògica Borrosa* a seques es refereix gairebé sempre a la lògica borrosa en sentit ampli de què parlava Zadeh. És per això, i per tal d'evitar confusions desafortunades, que en els darrers temps s'està consolidant la terminologia *Lògica Borrosa Matemàtica*[19] per referir-se a la lògica borrosa en sentit restringit de tal manera que quedi explícit que es tracta de la subdisciplina de la Lògica Matemàtica que estudia els diversos sistemes de raonament desenvolupats per la Lògica Borrosa, és a dir, les diverses lògiques borroses (en minúscules).

Un cop ja tenia ben identificades les lògiques de les tres t-normes contínues bàsiques, Hájek s'enfrontà al problema de trobar un fragment comú a totes tres que correspongués, no a una t-norma concreta, sinó al conjunt de totes les t-normes contínues. Com que seria la mínima lògica basada en t-normes residuades, es podria considerar la lògica borrosa bàsica. Amb aquest objectiu Hájek proposà el sistema BL (abreviació de *Basic fuzzy Logic*) el 1998 a [75] com a càlcul d'estil Hilbert en el llenguatge $\{\&, \rightarrow, \overline{0}\}$. Altres connectives es definien així: $\varphi \wedge \psi := \varphi \& (\varphi \rightarrow \psi)$, $\varphi \vee \psi := ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi) \wedge ((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \varphi)$ i $\neg\varphi := \varphi \rightarrow \overline{0}$ (com en el cas de Ł, és una lògica amb dues conjuncions: & té la propietat de la residuació (6), mentre que $\wedge$ es comporta com la funció mínim). BL té els següents axiomes:

(BL1) $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
(BL2) $\varphi \& \psi \rightarrow \varphi$
(BL3) $\varphi \& \psi \rightarrow \psi \& \varphi$
(BL4) $\varphi \& (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \psi \& (\psi \rightarrow \varphi)$
(BL5a) $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\varphi \& \psi \rightarrow \chi)$
(BL5b) $(\varphi \& \psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi))$
(BL6) $((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \chi) \rightarrow (((\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \chi) \rightarrow \chi)$
(BL7) $\overline{0} \rightarrow \varphi$

i Modus Ponens com a única regla d'inferència.

Hájek demostrà que les lògiques Ł, G i Π en són extensions axiomàtiques (és a dir, que es poden obtenir simplement afegint algun axioma al sistema BL). Concretament, Ł s'obté en afegir l'axioma d'involució:

(Inv) $\neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$

G s'obté en afegir l'axioma de contracció:

(Con) $\varphi \rightarrow \varphi \& \varphi$

i Π s'obté en afegir els axiomes de pseudo-complementació i cancel·lació:

[19] I no *Lògica Matemàtica Borrosa* (!), que podria tenir altres connotacions pejoratives.

(PC) $\neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$
(Can) $\neg\neg\chi \to ((\varphi \& \chi \to \psi \& \chi) \to (\varphi \to \psi))$

Conjecturà que BL era un sistema complet respecte de la semàntica donada per totes les matrius basades en t-normes contínues. La conjectura fou demostrada l'any 2000 per Cignoli, Esteva, Godo i Torrens a [22], tot completant els darrers passos que mancaven en el treball anterior de Hájek [76]:

Teorema 3.6 ([22])**.** *Considerem el llenguatge* $\{\&, \to, \overline{0}\}$*. Sigui BL el sistema d'estil Hilbert definit per Hájek i sigui* $\vdash_{\mathrm{BL}}$ *la relació de demostrabilitat que indueix. Sigui* $\models_{\mathrm{BL}}$ *la relació de conseqüència definida per:* $\Gamma \models_{\mathrm{BL}} \varphi$ *sii* $\Gamma \models_{\langle\langle [0,1], *, \Rightarrow_*, 0\rangle, \{1\}\rangle} \varphi$ *per tota t-norma contínua* $*$*, és a dir la relació de conseqüència semàntica donada per totes les matrius basades en t-normes contínues. Aleshores, per tot conjunt finit* Γ *de fórmules i tota fórmula* φ *tenim:* $\Gamma \vdash_{\mathrm{BL}} \varphi$ *si, i només si,* $\Gamma \models_{\mathrm{BL}} \varphi$*.*

BL era, efectivament, la lògica de totes les t-normes contínues i llurs residus. Però, era realment la lògica borrosa bàsica?

L'any 1995, a [54], s'havia trobat finalment un exemple de t-norma no contínua però que tanmateix tenia residu, l'anomenada *t-norma del nilpotent mínim*:

$$x *_{\mathrm{NM}} y = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 - y, \\ \min\{x, y\} & \text{altrament.} \end{cases}$$

$$x \Rightarrow_{\mathrm{NM}} y = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq y, \\ \max\{1 - x, y\} & \text{altrament.} \end{cases}$$

A la vista d'aquest exemple, Esteva i Godo s'adonaren que la condició necessària i suficient per tal que una t-norma fos residuada no era la continuïtat, sinó la continuïtat per l'esquerra. Per tant, es proposaren trobar una lògica més dèbil que la BL de Hájek, que fos completa respecte de totes les t-normes residuades. A l'article [42] de l'any 2001 hi proposaren un sistema d'estil Hilbert, anomenat *MTL* (abreviació de *Monoidal T-norm based Logic*) tot conjecturant que era complet respecte de la semàntica donada per totes les t-normes contínues per l'esquerra i llurs residus. Els axiomes de MTL són:

(MTL1) $(\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$
(MTL2) $\varphi \& \psi \to \varphi$
(MTL3) $\varphi \& \psi \to \psi \& \varphi$
(MTL4) $\varphi \wedge \psi \to \varphi$
(MTL5) $\varphi \wedge \psi \to \psi \wedge \varphi$
(MTL6) $\varphi \& (\varphi \to \psi) \to \varphi \wedge \psi$
(MTL7a) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \& \psi \to \chi)$
(MTL7b) $(\varphi \& \psi \to \chi) \to (\varphi \to (\psi \to \chi))$
(MTL8) $((\varphi \to \psi) \to \chi) \to (((\psi \to \varphi) \to \chi) \to \chi)$
(MTL9) $\overline{0} \to \varphi$

i el Modus Ponens n'és l'única regla d'inferència.

La conjectura fou demostrada l'any següent per Jenei i Montagna:

Teorema 3.7 ([93])**.** *Considerem el llenguatge* $\{\&, \to, \wedge, \overline{0}\}$*. Sigui MTL el sistema d'estil Hilbert definit per Esteva i Godo i sigui* $\vdash_{\mathrm{MTL}}$ *la relació de conseqüència que indueix. Sigui* $\models_{\mathrm{MTL}}$ *la relació de conseqüència definida per:* $\Gamma \models_{\mathrm{MTL}} \varphi$ *sii* $\Gamma \models_{\langle\langle [0,1], *, \Rightarrow_*, \min, 0\rangle, \{1\}\rangle} \varphi$ *per tota t-norma contínua per l'esquerra* $*$*. Aleshores, per tot conjunt* Γ *de fórmules i tota fórmula* φ *tenim:* $\Gamma \vdash_{\mathrm{MTL}} \varphi$ *si, i només si,* $\Gamma \models_{\mathrm{MTL}} \varphi$*.*

BL s'obté com a extensió de MTL en afegir l'axioma de divisibilitat:

(Div) $\varphi \wedge \psi \to \varphi \& (\varphi \to \psi)$

És precisament l'absència d'aquesta llei a MTL el que fa que la conjunció $\wedge$ no sigui definible i calgui posar-la com a connectiva primitiva.

Per tant, quedava clar que el sistema MTL d'Esteva i Godo era una lògica més feble que la BL de Hájek i més digna de ser anomenada la *lògica borrosa bàsica* ja que corresponia a la semàntica de totes les t-normes contínues per l'esquerra i era, per tant, la mínima lògica basada en alguna semàntica de t-normes residuades.

4 L'estudi algèbric de les lògiques borroses

Hem vist a la segona secció com la lògica clàssica gaudeix d'una semàntica basada en l'àlgebra de Boole de dos elements $\mathcal{B}_2$ (més concretament, basada en la matriu $\langle \mathcal{B}_2, \{1\} \rangle$). No obstant això, és ben sabut que també se li pot donar una semàntica basada en la classe de totes les àlgebres de Boole (reticles fitats distributius i complementats) de les quals $\mathcal{B}_2$ n'és l'exemple no trivial més senzill. La classe de totes les àlgebres de Boole, diguem-ne $\mathbb{BA}$, té una propietat molt rellevant per l'Àlgebra Universal:[20] és definible per mitjà d'equacions, és a dir, per descriure l'estructura que ha de tenir una àlgebra per ser considerada de Boole en tenim prou amb una sèrie d'equacions que cal que els elements satisfacin:

Definició 4.1. *Una estructura $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \neg, \overline{0}, \overline{1} \rangle$ és una àlgebra de Boole si satisfà les següents equacions:*[21]

Equacions de reticle fitat i distributiu:

1. $x \wedge y \approx y \wedge x, \quad x \vee y \approx y \vee x$
2. $x \wedge (y \wedge z) \approx (x \wedge y) \wedge z, \quad x \vee (y \vee z) \approx (x \vee y) \vee z$
3. $x \wedge x \approx x, \quad x \vee x \approx x$
4. $x \approx x \wedge (x \vee y), \quad x \approx x \vee (x \wedge y)$
5. $x \vee \overline{0} \approx x, \quad x \wedge \overline{1} \approx x$
6. $x \wedge (y \vee z) \approx (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

Equacions de complementació:

7. $x \wedge \neg x \approx \overline{0}, \quad x \vee \neg x \approx \overline{1}$

L'operació que interpreta la connectiva clàssica d'implicació es defineix així: $a \to b := \neg a \vee b$. Com en tot reticle, s'hi pot definir un ordre tot imposant que per qualssevol $a, b \in A$, $a \leq b$ sii $a \wedge b = a$.

[20] L'Àlgebra Universal és la branca de la Matemàtica que estudia de manera abstracta totes les estructures algèbriques possibles. El lector interessat pot trobar-ne un magnífic manual a [17].

[21] Escrivim les equacions amb el símbol $\approx$ no pas per denotar una igualtat aproximada, que no ho és, sinó perquè en el context de l'Àlgebra Universal s'hi estudien les equacions algèbriques com a objectes formals i cal distingir llur símbol d'igualtat d'aquell que usem en el metallenguatge. Per exemple, que una àlgebra $\mathcal{A}$ compleixi l'equació $x \wedge y \approx y \wedge x$ significa que $a \wedge b = b \wedge a$ per qualssevol $a, b \in A$.

Les classes d'àlgebres definibles per equacions s'anomenen *varietats*. L'Àlgebra Universal ha demostrat (el cèlebre Teorema de Birkhoff de 1935) que una classe d'àlgebres és una varietat si, i només si, és tancada per la formació d'imatges homomorfes, subàlgebres i productes directes. Donada una classe $\mathbb{K}$ qualsevol d'àlgebres del mateix tipus, hom pot demanar-se quina és la mínima classe amb aquestes propietats que la conté, l'anomenada *varietat generada* per $\mathbb{K}$, que denotem $\mathbf{V}(\mathbb{K})$. En el cas de les àlgebres de Boole resulta que $\mathbf{V}(\mathcal{B}_2) = \mathbb{BA}$, és a dir, $\mathcal{B}_2$ genera tota la varietat de les àlgebres de Boole. Això, en el fons, explica el fet que la semàntica es pugui reduir a prendre només l'àlgebra de dos elements.

És molt habitual que en l'estudi de lògiques no-clàssiques hom trobi que els correspon de manera natural una semàntica basada en alguna varietat d'àlgebres. És el cas de la lògica intuïcionista, que resulta ésser completa respecte de la varietat de les àlgebres de Heyting, $\mathbb{HA}$:[22]

Definició 4.2. *Una estructura $\mathcal{A} = \langle A, \wedge, \vee, \rightarrow, \overline{0}, \overline{1}\rangle$ és una àlgebra de Heyting si és un reticle fitat i distributiu i, a més satisfà la condició de* pseudo-complementació relativa*:*
per qualssevol $a, b, c \in A$, $a \wedge c \leq b$ sii $c \leq a \rightarrow b$ (és a dir, la llei de residuació de $\wedge$ respecte de $\rightarrow$). L'operació que interpreta la connectiva de negació es defineix així: $\neg a := a \rightarrow \overline{0}$.

Es demostra que la condició de pseudo-complementació relativa també és expressable mitjançant equacions i, per tant, $\mathbb{HA}$ és una varietat. De fet, $\mathbb{BA}$ és una subvarietat de $\mathbb{HA}$ (tota àlgebra de Boole és àlgebra de Heyting, però no al revés) i això fa que la lògica intuïcionista sigui més dèbil que la clàssica, és a dir, demostra menys proposicions. Per exemple, la llei del terç exclòs, $\varphi \vee \neg\varphi$, és una tautologia per la lògica clàssica, però no ho és per la intuïcionista (observem que correspon a la propietat de complementació de les àlgebres, que val a $\mathbb{BA}$ però en general falla a $\mathbb{HA}$).

També per les lògiques borroses s'han trobat semàntiques basades en varietats d'àlgebres, que contenen com a casos particulars les estructures definides per t-normes residuades que hem vist a la secció anterior. Això fa que també aquestes lògiques es puguin estudiar amb les eines i els mètodes de la Lògica Algèbrica.[23] En introduir MTL, Esteva i Godo ja hi associaren una classe d'àlgebres que generalitzaven les que Hájek havia proposat per l'estudi de BL.

Definició 4.3. *Una estructura $\mathcal{A} = \langle A, \&, \rightarrow, \wedge, \vee, \overline{0}, \overline{1}\rangle$ és una MTL-àlgebra si $\langle A, \wedge, \vee, \overline{0}, \overline{1}\rangle$ és un reticle fitat i distributiu*[24]*, $\langle A, \&, \overline{1}\rangle$ és un monoide commutatiu en què $\&$ és monòtona creixent en cada argument respecte de l'ordre del reticle, és residuada (és a dir tal que $\&$ i $\rightarrow$ compleixen la llei de residuació) i, a més, s'hi compleix l'equació de* prelinealitat*: $(x \rightarrow y) \vee (y \rightarrow x) \approx \overline{1}$.*

És clar que la classe de totes les MTL-àlgebres, $\mathbb{MTL}$, també és una varietat. Esteva i Godo demostren a [42] que dóna una semàntica completa pel càlcul MTL. La semàntica de t-normes és una restricció de $\mathbb{MTL}$ ja que per tota t-norma contínua per l'esquerra $*$, l'estructura $[0,1]_* = \langle [0,1], *, \Rightarrow_*, \min, \max, 0, 1\rangle$ és una MTL-àlgebra. Recíprocament, és fàcil veure que en tota MTL-àlgebra definida sobre l'univers $[0,1]$, l'operació $\&$ ha de ser una t-norma contínua per l'esquerra. Per tant, les MTL-àlgebres sobre $[0,1]$ són exactament les donades per t-normes contínues per l'esquerra. Com que constitueixen la semàntica que motivà la creació de MTL, les anomenem *MTL-àlgebres estàndard* i el conjunt l'anomenem *semàntica estàndard*.

Si a la definició anterior li treiem la condició de prelinealitat, s'obté un tipus d'estructura, els reticles fitats i residuats, que ja havia estat estudiada anteriorment. Es tracta de la varietat que dóna

[22] Se'n pot veure la demostració juntament amb una bona introducció a la matèria per exemple a [19].

[23] Entenem per *Lògica Algèbrica* la branca de la Lògica Matemàtica que estudia els sistemes lògics amb recursos algèbrics.

[24] Es pot demostrar que la distributivitat és una propietat redundant en aquesta definició.

una semàntica a l'anomenada *lògica monoidal* (ML, per més brevetat) definida el 1995 per Höhle a [87]. MTL és, doncs, l'extensió del sistema ML que s'obté en afegir l'axioma de prelinealitat:

(Lin) $\quad (\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi)$

Això justifica que Esteva i Godo la bategessin com a *Monoidal T-norm based Logic*. D'altra banda, ML resultava ser equivalent, segons demostrà el japonès Ono (vegeu [120, 119]), al sistema FL_{ew}, una de les anomenades *lògiques subestructurals*[25] en què falla la llei de contracció. Com que MTL és una extensió de FL_{ew} que tampoc satisfà la contracció, tot plegat ens permet considerar la lògica MTL (i moltes de les seves extensions) des de tres punts de vista o tradicions lògiques diferents:

- com a lògica borrosa, perquè és completa respecte d'una semàntica de t-normes residuades,
- com a lògica multivalorada, perquè és completa respecte d'una semàntica d'àlgebres de més de dos valors, i
- com a lògica subestructural, perquè forma part de la família de les lògiques sense contracció.

A més, els catalans Adillon i Verdú demostraren l'any 2000 a [2] que la lògica FL_{ew}, i per tant ML, és *algebritzable* en el sentit establert per Blok i Pigozzi a [14]. Això significa que la classe dels reticles fitats i residuats no només forneix una semàntica completa per ML, sinó que a més hi ha un vincle molt fort entre lògica i la varietat en el següent sentit tècnic:

Definició 4.4. *Sigui $\mathcal{L} = \{\&, \to, \wedge, \vee, \overline{0}, \overline{1}\}$ el llenguatge del sistema ML i sigui $\mathbb{RL}$ la varietat dels reticles fitats i residuats. Sigui $Eq_{\mathcal{L}}$ el conjunt de les equacions (igualtats formals de fórmules) en el llenguatge $\mathcal{L}$. Donat un conjunt d'equacions $\Lambda \subseteq Eq_{\mathcal{L}}$ i una equació $\varphi \approx \psi \in Eq_{\mathcal{L}}$, diem que $\varphi \approx \psi$ és* conseqüència equacional *(relativa a $\mathbb{RL}$) de Λ, si per tota $\mathcal{A} \in \mathbb{RL}$ i tota valoració e en $\mathcal{A}$ tal que $e(\alpha) = e(\beta)$ per tota $\alpha \approx \beta \in \Lambda$, tenim $e(\varphi) = e(\psi)$. Ho denotem amb $\Lambda \models^{eq}_{\mathbb{RL}} \varphi \approx \psi$.*

Teorema 4.5. *ML és una lògica algebritzable en el sentit de Blok i Pigozzi i $\mathbb{RL}$ és la seva* semàntica algèbrica equivalent. *Això vol dir que es compleixen les quatre condicions següents:*

1. *Per tot $\Gamma \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$ i tota $\varphi \in Fm_{\mathcal{L}}$, $\Gamma \vdash_{\mathrm{ML}} \varphi$ sii $\{\gamma \approx \overline{1} \mid \gamma \in \Gamma\} \models^{eq}_{\mathbb{RL}} \varphi \approx \overline{1}$.*
2. *Per tot $\Lambda \subseteq Eq_{\mathcal{L}}$ i tota $\varphi \approx \psi \in Eq_{\mathcal{L}}$, $\Lambda \models^{eq}_{\mathbb{RL}} \varphi \approx \psi$ sii $\{\alpha \leftrightarrow \beta \mid \alpha \approx \beta \in \Lambda\} \vdash_{\mathrm{ML}} \varphi \leftrightarrow \psi$.*
3. *$\varphi \approx \psi \models^{eq}_{\mathbb{RL}} \varphi \leftrightarrow \psi \approx \overline{1}$ i $\varphi \leftrightarrow \psi \approx \overline{1} \models^{eq}_{\mathbb{RL}} \varphi \approx \psi$.*
4. *$\varphi \vdash_{\mathrm{ML}} \varphi \leftrightarrow \overline{1}$ i $\varphi \leftrightarrow \overline{1} \vdash_{\mathrm{ML}} \varphi$.*

on $\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \to \psi)\&(\psi \to \varphi)$.

Tenim, per tant, que la relació de demostrabilitat de la lògica és equivalent a la conseqüència equacional de la varietat a través de dues *traduccions*: una que passa de fórmules a equacions (a una fórmula φ li correspon l'equació $\varphi \approx \overline{1}$) i una altra que fa el camí contrari (a una equació $\varphi \approx \psi$ li correspon la fórmula $\varphi \leftrightarrow \psi$). A més les traduccions són inverses l'una de l'altra en el sentit que si n'apliquem una i després l'altra, recuperem el mateix objecte mòdul equivalència. Aquesta connexió, a més, l'hereten les extensions axiomàtiques de ML:

Teorema 4.6. *Les extensions axiomàtiques de ML i les subvarietats de $\mathbb{RL}$ es corresponen bijectivament de la següent manera:*

[25] Les lògiques subestructurals són aquells sistemes no-clàssics en què hi falla alguna de les anomenades *regles estructurals*: l'intercanvi, la debilitació o la contracció. El lector interessat pot consultar les monografies [62, 121, 125].

- *Donat* $\Gamma \subseteq Fm_{\mathcal{L}}$*, sigui L la lògica que s'obté en afegir a ML les fórmules de* Γ *com a axiomes. Aleshores, L és una lògica algebritzable amb les mateixes traduccions que ML i la seva semàntica algèbrica equivalent és la subvarietat* $\mathbb{L}$ *de* $\mathbb{RL}$ *que s'obté en afegir les equacions* $\{\gamma \approx \overline{1} \mid \gamma \in \Gamma\}$.

- *Donat* $\Lambda \subseteq Eq_{\mathcal{L}}$*, sigui* $\mathbb{L}$ *la varietat que s'obté en afegir a* $\mathbb{RL}$ *les equacions de* Λ*. Aleshores,* $\mathbb{L}$ *és la semàntica algèbrica equivalent (amb les mateixes traduccions que ML) de la lògica L que s'obté en afegir a ML les fórmules* $\{\alpha \leftrightarrow \beta \mid \alpha \approx \beta \in \Lambda\}$ *com a axiomes.*

Per tant, en particular tenim que MTL és algebritzable i que té com a semàntica algèbrica equivalent la varietat $\mathbb{MTL}$. I el mateix val per totes les seves extensions axiomàtiques.[26] Així tenim una semàntica algèbrica equivalent per cadascuna de les lògiques borroses que hem esmentat (en el cas de Ł coincideix amb la varietat de les MV-àlgebres que introduí Chang precisament per demostrar la conjectura de Łukasiewicz). D'altra banda, hom pot demostrar que la varietat associada a G és una subvarietat de $\mathbb{HA}$ (concretament, la de les àlgebres de Heyting que satisfan la prelinealitat) i és clar que $\mathbb{HA}$ es pot veure com a subvarietat de $\mathbb{RL}$ (la subvarietat en què les operacions $\&$ i $\wedge$ coincideixen). Finalment, fixem-nos que $\mathbb{BA}$ és subvarietat de totes les varietats que hem anomenat, perquè en qualsevol reticle fitat i residuat els elements $\overline{0}$ i $\overline{1}$ constitueixen una subàlgebra isomorfa a $\mathcal{B}_2$. Tot plegat ens mostra que totes les lògiques que hem considerat fins ara formen part d'una mateixa família de lògiques algebritzables.[27]

El fort lligam entre lògiques i classes d'àlgebres que estableix l'algebritzabilitat permet demostrar una sèrie de resultats que connecten propietats de les lògiques amb propietats algèbriques equivalents. Són els anomenats *teoremes de pont*.[28] Així ha quedat ben establert que les lògiques borroses es poden estudiar amb tota l'artilleria de la Lògica Algèbrica i avui ja tenim una bona colla de treballs en aquesta direcció.

Un factor decisiu en aquest estudi i que és molt particular de les extensions de MTL és el paper que hi juguen les àlgebres linealment ordenades, les anomenades *cadenes*, ja que totes les àlgebres es poden representar a partir de les cadenes en el següent sentit tècnic provinent de l'Àlgebra Universal:

Definició 4.7. *Una àlgebra* $\mathcal{A}$ *és* representable com a producte subdirecte *de la família* $\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\}$ *si existeix una immersió de* $\mathcal{A}$ *en el producte directe de la família,* $h : \mathcal{A} \to \prod_{i\in I} \mathcal{A}_i$*, tal que per qualsevol* $i \in I$*, la composició de* h *amb la projecció* i*-èsima és exhaustiva.*

Teorema 4.8 ([42])**.** *Tota MTL-àlgebra és representable com a producte subdirecte de MTL-cadenes.*

Corol·lari 4.9 ([42])**.** *MTL és completa respecte de la semàntica donada per les MTL-cadenes.*

Aquests resultats s'hereten per subvarietats i, per tant, totes les extensions axiomàtiques de MTL gaudeixen d'aquesta completesa respecte de la semàntica de cadenes. Des del punt de vista algèbric això significa que, en gran part, l'estudi d'aquestes varietats es redueix a l'estudi dels seus membres

[26] El resultat es pot millorar i estendre l'algebritzabilitat a totes les extensions finitàries de MTL (o de ML), incloent aquelles en què també s'hi afegeixen regles d'inferència. Aleshores, la correspondència s'estableix entre extensions finitàries i subquasivarietats (una noció que estén la de varietat). Vegeu-ne els detalls a [14] per a qualsevol lògica algebritzable.

[27] Una sèrie d'investigacions dels darrers anys han eixamplat substancialment el marc de $\mathbb{RL}$ i les seves subvarietats a base de considerar estructures més febles: reticles no fitats, o no commutatius, o en què l'element màxim no és l'element neutre del monoide. Aquest plantejament, evidentment, transcendeix de llarg el marc de les lògiques borroses basades en t-normes residuades, i correspon més aviat a un estudi algèbric de les lògiques subestructurals. Vegeu-ho a [62].

[28] S'ha desenvolupat tota una teoria que estudia els sistemes lògics i els diversos tipus de connexió que poden tenir amb semàntiques algèbriques, tot establint els teoremes de pont de què gaudeixen en cada cas. Es tracta de la Lògica Algèbrica Abstracta (vegeu una introducció a la matèria a [59] i, en aquesta mateixa revista, a [56]).

linealment ordenats. A continuació repassem breument les principals fites en l'estudi algèbric de les extensions de MTL:

- **MV-àlgebres:** Són les àlgebres associades a una lògica borrosa, Ł, que s'han estudiat des de fa més temps (des que Chang les introduí el 1958) i se'n té un coneixement realment molt profund. Són estructures equivalents a les àlgebres de Wajsberg estudiades a [126, 60]. En particular, se'n coneix l'estructura de tot el reticle de subvarietats[29] i les equacions que les defineixen, o equivalentment podem dir que es coneixen totes les extensions axiomàtiques de la lògica de Łukasiewicz (vegeu-ho a [95, 33]). Pel que fa a l'estudi de subquasivarietats, Joan Gispert i Antoni Torrens hi han fet importants contribucions (vegeu-ho a [65, 66, 68]). El fet fonamental que ha permès l'estudi en profunditat d'aquestes àlgebres ha estat llur estreta relació amb un tipus d'estructura algèbrica ben coneguda: els grups abelians reticulats. Chang ja formulà una relació entre les MV-cadenes i els grups abelians linealment ordenats amb unitat positiva, i Mundici ho millorà a [111] tot obtenint una equivalència categorial entre la categoria de les MV-àlgebres i la dels grups abelians reticulats amb unitat forta. És notable també el resultat de McNaughton [99] que caracteritza totes les funcions definibles a la MV-àlgebra estàndard com a funcions contínues definides a trossos per polinomis lineals amb coeficients enters. La monografia [23] recull en gran part el coneixement actual sobre MV-àlgebres.

- **Π-àlgebres:** Cignoli i Torrens han estudiat la varietat de les Π-àlgebres a [24]. Demostren que hi ha una equivalència natural entre una subcategoria de Π-àlgebres i la categoria dels grups abelians reticulats i en conclouen que l'única subvarietat no trivial de Π-àlgebres és $\mathbb{BA}$. Per tant, l'única extensió axiomàtica consistent de Π és la lògica clàssica. A més, recentment, s'ha demostrat a [30] que tampoc no hi ha cap subquasivarietat no-trivial de Π-àlgebres llevat de $\mathbb{BA}$, i per tant, tampoc cap extensió finitària de Π llevat de la lògica clàssica. En aquest sentit podem dir que Π és una lògica borrosa maximal. Són interessants també els resultats de [9] sobre traduccions entre Π i la lògica de Łukasiewicz.

- **G-àlgebres:** L'estructura de les subvarietats de $\mathbb{G}$ és molt senzilla. Si per cada n, $\mathcal{G}_n$ denota la G-cadena d'n-elements, tenim que les úniques subvarietats són: $\mathbf{V}(\mathcal{G}_1) \subseteq \mathbf{V}(\mathcal{G}_2) \subseteq \ldots \subseteq \mathbf{V}(\mathcal{G}_n) \subseteq \mathbf{V}(\mathcal{G}_{n+1}) \subseteq \ldots \subseteq \mathbb{G}$, i clarament $\mathbf{V}(\mathcal{G}_1)$ conté només l'àlgebra trivial i $\mathbf{V}(\mathcal{G}_2) = \mathbb{BA}$. Cada $\mathbf{V}(\mathcal{G}_n)$ queda axiomatitzada per l'equació $\bigvee_{i<n}(x_i \to x_{i+1}) \approx \overline{1}$ (aquests resultats es poden trobar, per exemple, a [74]). A més, dels resultats de [36] i [30] se'n segueix que aquestes també són les úniques subquasivarietats.

- **BL-àlgebres:** No s'ha trobat una descripció completa de l'estructura de subvarietats de $\mathbb{BL}$, però el fet que les cadenes es puguin expressar com a sumes ordinals dels tres tipus bàsics ha permès assolir resultats molt significatius. En particular se sap que conté un continu de subvarietats, s'han axiomatitzat les varietats generades per àlgebres estàndard, i s'han estudiat la representació funcional i propietats d'amalgamació. Vegeu-ho a [3, 4, 32, 34, 46, 131, 104, 5].

- **NM-àlgebres:** L'estructura del reticle de subvarietats de la varietat generada per la t-norma del Nilpotent Mínim de Fodor (recordem que no és una varietat de BL-àlgebres perquè la t-norma només és contínua per l'esquerra) ha estat completament descrita, amb axiomatitzacions, per Joan Gispert a [67].

[29] Els ordres reticulars són aquells en què donat parell d'elements sempre n'existeix el suprem i l'ínfim. Com que, fixat un llenguatge, la intersecció de famílies arbitràries de varietats és varietat, no costa gaire mostrar que la inclusió dóna de fet un ordre reticular. Per tant, donada una varietat podem parlar del reticle de les seves subvarietats. Tot això val anàlogament per les quasivarietats.

- **Altres tipus de MTL-àlgebres:** La manca d'un bon teorema de representació que valgui per totes les MTL-cadenes fa molt difícil la descripció en general de l'estructura de subvarietats de $\mathbb{MTL}$. Tanmateix, darrerament hi ha hagut avenços significatius en diverses regions del reticle: àlgebres cancel·latives [88, 89, 90, 91], àlgebres feblement cancel·latives [106], àlgebres perfectes i bipartides [114, 115], àlgebres n-contractives [18, 69, 92], àlgebres del nilpotent mínim feble [116] o àlgebres corresponents a t-normes regulars [134]. Gran part d'aquests resultats es troben a la monografia [113].

5 Recerca actual i línies de futur

Des que la Lògica Matemàtica Borrosa ha esdevingut una branca de la Lògica Matemàtica de ple dret, s'hi ha consolidat una agenda de recerca genuïnament típica de la disciplina en què s'emmarca. Pràcticament tots els àmbits de la Lògica Matemàtica forneixen eines, perspectives i problemes importants per les lògiques borroses. A grans trets, podríem esquematitzar-ho de la següent manera:[30]

1. **Lògica algèbrica:** A la secció anterior ens hem referit a l'estudi algèbric de les extensions de MTL, però des de la Lògica Algèbrica també s'han fet uns quants estudis de les seves expansions, és a dir, de lògiques borroses amb més poder expressiu que s'obtenen en afegir connectives addicionals al llenguatge de MTL (vegeu [8, 45, 58, 44, 53]), i també dels seus fragments, o sia, lògiques amb menys connectives (vegeu [28, 16, 1, 43]). Altres treballs han mostrat la relació entre les semàntiques algèbriques i les semàntiques relacionals a l'estil de Kripke (vegeu [107, 108, 109]).

2. **Teoria de models:** L'estudi de les lògiques de primer ordre ha comportat el desenvolupament d'una incipient teoria de models per a les lògiques borroses. Són especialment significatius els resultats de [27, 26].

3. **Teoria de conjunts:** Alguns treballs desenvolupen una teoria axiomàtica de conjunts basada en lògiques borroses (vegeu [136, 82, 80]). A més, amb voluntat de fornir una fonamentació axiomàtica a tota la matemàtica borrosa, aquesta teoria de conjunts s'ha estès a una teoria de classes borroses d'ordre superior (vegeu [10, 12, 13]).

4. **Teoria de la prova:** A part dels mencionats càlculs a l'estil de Hilbert, s'ha fet i es continua fent una intensa recerca enfocada a trobar altres sistemes de prova per les lògiques borrosos. Vegeu-ho a la monografia [103].

5. **Teoria de la recursió (o de la computabilitat):** S'ha estudiat la complexitat computacional d'un bon nombre de lògiques decidibles, i la complexitat aritmètica d'altres lògiques indecidibles. Vegeu-ho a [6, 81].

6. **Teoria de jocs:** S'han desenvolupat, i es continua fent, interpretacions de les lògiques borroses a partir de diversos tipus de jocs: jocs dialògics [63, 64, 51], jocs de Rényi-Ulam [112, 105] i jocs d'avaluació [29].

7. **Filosofia de la Lògica:** Altres treballs estudien específicament el paper de les lògiques borroses en el tractament de problemes lògics, com les paradoxes de la vaguetat [50, 84, 122] o la paradoxa del mentider [85].

[30] No pretenem donar una bibliografia exhaustiva que demostri amb detall el volum d'aquesta recerca, sinó que ens limitarem a donar les referències més rellevants o que contenen exposicions més completes de cada matèria.

8. **Aplicacions:** Part del desenvolupament teòric de la Lògica Borrosa Matemàtica es fa enfocat a diversos tipus d'aplicacions com ara la programació lògica [135], el raonament possibilístic i probabilístic per al tractament de la incertesa [71, 72], les lògiques descriptives i les ontologies [79], o el raonament amb similaritats [39].

És previsible que totes les línies actuals de recerca que acabem de mencionar es continuïn desenvolupant a nivells més grans de profunditat durant els propers anys; però d'altra banda també es comencen a notar certs indicis que apunten cap a un eixamplament del marc de la Lògica Borrosa Matemàtica. Hem argumentat més amunt que, segons el paradigma de les lògiques basades en t-normes residuades, el sistema MTL és la mínima lògica borrosa i que, per tant, l'estudi de les lògiques borroses es redueix a l'estudi de les extensions i expansions de MTL que tenen completesa estàndard. Tanmateix, s'està començant a proposar un paradigma més ampli, com dèiem suara. En efecte, al recent article [11] Běhounek i Cintula hi defensen la tesi segons la qual allò distintiu o característic de les lògiques borroses no és el fet que gaudeixin d'un teorema de completesa respecte d'una semàntica de t-normes residuades, sinó que tinguin una semàntica completa d'àlgebres linealment ordenades, és a dir, de cadenes qualssevol. Segons aquests autors, no cal exigir que la interpretació d'una lògica borrosa siguin unes àlgebres de valors de veritat sobre l'interval unitat real en què la conjunció forta i la implicació s'hi interpretin respectivament a través d'una t-norma contínua per l'esquerra i el seu residu. Les intuïcions bàsiques que donen suport al tractament borrós de la vaguetat no depenen necessàriament de cap propietat específica d'aquestes semàntiques més enllà del fet que es tracta d'un conjunt de valors de veritat linealment ordenats. La idea queda formulada amb un slogan: *les lògiques borroses són les lògiques de les cadenes*. Per tant, hom pot considerar lògiques completes respecte de cadenes definides sobre cadenes racionals, hiperreals, finites o, en general, cadenes de qualsevol naturalesa. Aquesta intuïció no ha quedat en una mera proposta metodològica, sinó que ha estat enfortida pels resultats de completesa respecte d'aquests tipus de semàntiques que podem trobar per exemple a [40, 26, 52].

I no només s'eixampla el marc gràcies a la possibilitat de prendre nous tipus d'intervals linealment ordenats per als valors de veritat, sinó que la laxitud de la definició de les lògiques borroses com a lògiques de cadenes, permet encara algunes generalitzacions ulteriors. Per exemple, hom pot considerar interpretacions no commutatives de la conjunció forta [77, 78], o interpretacions en què l'element neutre de la conjunció forta no coincideixi necessàriament amb l'element màxim [61, 102]. Ara bé, en tots els exemples coneguts l'ordre lineal de les cadenes és induït per la interpretació d'una connectiva d'implicació. Això ha justificat la formulació i estudi d'un marc abstracte (en el sentit de la Lògica Algèbrica Abstracta) per a les lògiques borroses com a lògiques completes respecte d'una semàntica de cadenes linealment ordenades a través d'una implicació a [25, 31].

Una altra línia d'eixamplament de l'horitzó de la Lògica Borrosa Matemàtica, que en un cert sentit va encara més enllà, gravita al voltant del concepte de valor de veritat intermedi. En tota l'exposició que hem fet fins ara hi ha hagut una característica que ha romàs immutable: la relació de conseqüència semàntica de les lògiques es defineix en termes de la interpretació de la constant $\overline{1}$ (recordem la Definició 2.1 pel cas clàssic i observem com es respecta per a les lògiques hem anat presentant). No deixa de ser, almenys en part, paradoxal que després de tant d'insistir en la idea de la veritat com una qüestió de grau, a l'hora de definir el concepte central de la Lògica, la conseqüència, els graus de veritat intermedis no hi juguin cap paper. És per això que alguns autors han proposat darrerament altres nocions de lògica borrosa més fidels a la idea dels graus de veritat intermedis. A grans trets, les propostes són dues:

1. **Lògiques borroses amb graus de veritat intermedis com a objectes sintàctics:** Aquesta proposta parteix dels treballs de Pavelka [123] en què la lògica de Łukasiewicz fou expandida

a base d'afegir al llenguatge una constant $\overline{r}$ per cada valor de veritat $r \in [0,1]$ de l'interval real i es demostrà que gaudia d'un particular teorema de completesa. Posteriorment Hájek mostrà a [75] que l'expansió i la demostració de la completesa també es podien fer si simplement s'afegien al llenguatge constants $\overline{r}$ per cada valor de veritat racional $r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ i, per tant, tot preservant la numerabilitat del llenguatge. Darrerament aquesta línia de treball ha estat desenvolupada per un gran nombre de lògiques a la sèrie d'articles [47, 128, 41, 48, 49]. Com que les lògiques resultants continuen sent algebritzables, aquesta proposta es manté en el marc de l'estudi algèbric de les expansions de MTL tal com l'hem presentat aquí. En particular, s'hi han estudiat els fragments de les lògiques corresponents a les anomenades *fórmules avaluades* (vegeu [117, 118]), és a dir, fórmules del tipus $\overline{r} \to \varphi$ on φ no té constants pels valors de veritat intermedis. Aquests fragments formalitzen una pràctica molt generalitzada en les aplicacions basades en la Lògica Borrosa: l'ús de proposicions borroses per les quals no es té el grau de veritat exacte sinó només una fita inferior.

2. **Lògiques borroses com a lògiques de la preservació dels graus de veritat intermedis:** Als articles [55, 57, 15] s'hi estudien unes lògiques en què s'estableix que un conjunt Γ de fórmules té com a conseqüència una fórmula φ si per qualsevol valoració el grau de veritat de φ és més gran o igual que el mínim dels graus de veritat de les fórmules de Γ. Aquest tipus de lògiques en general no són algebritzables (ni tan sols ho són en el sentit molt feble que es considera a [31]) i, per tant, transcendeixen els paradigmes que hem comentat aquí.

En definitiva, tot plegat ens mostra la Lògica Borrosa Matemàtica com una disciplina en plena fase de desenvolupament i expansió.

Agraïments: Agraeixo a Félix Bou, Francesc Esteva, Josep Maria Font, Joan Gispert, Lluís Godo i Ventura Verdú l'atenta lectura de la versió preliminar de l'article i els valuosos comentaris i correccions que hi han fet. Agraeixo també a Petr Cintula les indicacions bibliogràfiques que m'han ajudat a completar el darrer apartat. Aquest treball ha estat fet amb el suport de la beca Beatriu de Pinós 2006-BP-A-10043 del Departament d'Educació i Universitats de la Generalitat de Catalunya i del projecte MULOG2 TIN2007-68005-C04 del Ministeri espanyol d'Educació i Ciència.

References

[1] ADILLON, R.; GARCÍA-CERDAÑA, À.; VERDÚ, V. On Three Implication-Less Fragments of T-Norm Based Fuzzy Logics, *Fuzzy Sets and Systems* 158 (2007) 2575–2590.

[2] ADILLON, R.; VERDÚ, V. On a contraction-less intuitionistic propositional logic with conjunction and fusion, *Studia Logica* 65 (2000) 11–30.

[3] AGLIANÒ, P.; FERREIRIM, I. M. A.; MONTAGNA, F. Basic hoops: an algebraic study of continuous t-norms, *Studia Logica* 87 (2007) 73–98.

[4] AGLIANÒ, P.; MONTAGNA, F. Varieties of BL-algebras I: general properties, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 181 (2003) 105–129.

[5] AGUZZOLI, S.; BOVA, S. The free n-generated BL-algebra, Pendent de publicació, 2008.

[6] AGUZZOLI, S.; GERLA, B.; HANIKOVÁ, Z. Complexity Issues in Basic Logic, *Soft Computing* 9 (2005) 919–934.

[7] ALSINA, C.; TRILLAS E.; VALVERDE, L. On some logical connectives for Fuzzy Set Theory, *J. Math. An. and Appl.* 93 (1983) 15–26.

[8] BAAZ, M. Infinite-valued Gödel logics with $0-1$ projections and relativizations, In GÖDEL '96 - Logical foundations of mathematics, computer science and physics. *Lecture Notes in Logic* 6 (1996), P. Hájek (Ed.), Springer Verlag, 23–33.

[9] BAAZ, M.; HÁJEK, P.; ŠVEJDA, D.; AND KRAJIČEK, J. Embedding logics into product logic, *Studia Logica* 61 (1998) 35–47.

[10] BĚHOUNEK, L.; CINTULA, P. Fuzzy Class Theory, *Fuzzy Sets and Systems* 154 (2005) 34 – 55.

[11] BĚHOUNEK, L.; CINTULA, P. Fuzzy Logics as the Logics of Chains, *Fuzzy Sets and Systems* 157 (2006) 604–610.

[12] BĚHOUNEK, L.; CINTULA, P. From Fuzzy Logic to Fuzzy Mathematics: A Methodological Manifesto, *Fuzzy Sets and Systems* 157 (2006) 642–646.

[13] BĚHOUNEK, L.; CINTULA, P. Fuzzy Class Theory: a primer, Pendent de publicació, 2008. [Es pot descarregar lliurement a www.cs.cas.cz/research/library/reports_900.shtml].

[14] BLOK, W. J.; PIGOZZI, D. Algebraizable logics, *Memoirs of the American Mathematical Society* 396, vol 77, 1989.

[15] BOU, F.; ESTEVA, F.; FONT, J. M.; GIL, À.; GODO, L.; TORRENS, A.; VERDÚ, V. Logics preserving degrees of truth from varieties of residuated lattices. Pendent de publicació [es pot descarregar lliurement a http://arxiv.org/abs/0803.1648]

[16] BOU, F.; GARCÍA-CERDAÑA, À.; VERDÚ, V. On two fragments with negation and without implication of the logic of residuated lattices, *Archive for Mathematical Logic* 45 (2006) 615–647.

[17] BURRIS, S.; SANKAPPANAVAR, H. P. *A course in Universal Algebra*, Springer Verlag, New York, 1981. [Exhaurit. Es pot descarregar lliurement a http://www.math.uwaterloo.ca/_snburris]

[18] CIABATTONI, A.; ESTEVA, F.; GODO, L. T-norm based logics with n-contraction, *Neural Network World* 12 (2002) 453–460.

[19] CHAGROV A.; ZACHARYASCHEV, M. *Modal logic*, Clarendon Press, Oxford, 1997.

[20] CHANG, C. C. Algebraic analysis of many valued logics, *Transactions of the American Mathematical Society* 88 (1958) 456–490.

[21] CHANG, C. C. A new proof of the completeness of the Lukasiewicz axioms, *Transactions of the American Mathematical Society* 93 (1959) 74–80.

[22] CIGNOLI, R.; ESTEVA, F.; GODO, L.; TORRENS, A. Basic Fuzzy Logic is the logic of continuous t-norms and their residua, *Soft Computing* 4 (2000) 106–112.

[23] CIGNOLI, R.; D'OTTAVIANO, I. M. L.; MUNDICI, D. *Algebraic foundations of many-valued reasoning*, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[24] CIGNOLI, R.; TORRENS, A. An algebraic analysis of product logic, *Multiple-Valued Logic* 5 (2000) 45–65.

[25] CINTULA, P. Weakly Implicative (Fuzzy) Logics (I): Basic Properties, *Archive for Mathematical Logic* 45 (2006) 673–704.

[26] CINTULA, P.; ESTEVA, F.; GISPERT, J.; GODO, L.; MONTAGNA, F.; NOGUERA, C. Distinguished algebraic semantics for t-norm based fuzzy logics: methods and algebraic equivalencies, Pendent de publicació, 2008.

[27] CINTULA, P.; HÁJEK, P. On theories and models in fuzzy predicate logics, *The Journal of Symbolic Logic* 71 (2006) 863–880.

[28] CINTULA, P.; HÁJEK, P.; HORČÍK, R. Formal systems of fuzzy logic and their fragments, *Annals of Pure and Applied Logic* 150 (2008) 40–65.

[29] CINTULA, P.; MAJER, O. Towards Evaluation Games for Fuzzy Logics, a *Logic, Games and Philosophy: Foundational Perspectives*, Prague Colloquium October 2004, Pendent de publicació.

[30] CINTULA, P.; METCALFE, G. Structural completeness for fuzzy logics, Pendent de publicació, 2008.

[31] CINTULA, P.; NOGUERA, C. A hierarchy of (fuzzy) implicational logics: the propositional case, Pendent de publicació, 2008.

[32] DI NOLA, A.; ESTEVA, F.; GARCIA, P.; GODO, L.; SESSA, S. Subvarieties of BL-algebras generated by single-component chains, *Archive for Mathematical Logic* 41 (2002) 673–685.

[33] DI NOLA, A.; LETTIERI, A. Equational characterization of all varieties of MV-algebras, *Journal of Algebra* 221 (1999) 463-474.

[34] DI NOLA, A.; SESSA, S.; ESTEVA, F.; GODO, L.; GARCIA, P. The variety generated by perfect BL-algebras: an algebraic approach in a fuzzy logic setting, *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 35 (2002) 197–214.

[35] DUMMETT, M. A propositional calculus with denumerable matrix, *The Journal of Symbolic Logic* 24 (1959) 97–106.

[36] DZIK, W.; WRONSKI A. Structural Completeness of Gödel's and Dummett's Propositional Calculi, *Studia Logica* 32 (1973) 69–73.

[37] ENDERTON, H. B. *A mathematical introduction to logic*, Academic Press, 2000.

[38] ESTEVA, F.; DOMINGO, X. Sobre negaciones fuertes y débiles en $[0, 1]$, *Stochastica* 4 (1980) 141–166.

[39] ESTEVA, F.; GARCIA, P.; GODO, L. Similarity-based reasoning, a *Discovering the world with fuzzy logic*, Physica, 2000, pp. 367-396.

[40] ESTEVA, F.; GISPERT, J.; GODO, L.; MONTAGNA, F. On the standard and Rational Completeness of some axiomatic extensions of Monoidal t-norm Based Logic, *Studia Logica* 71 (2002) 199–226.

[41] ESTEVA, F.; GISPERT, J.; GODO, L.; NOGUERA, C. Adding truth-constants to logics of continuous t-norm: axiomatization and completeness results, *Fuzzy Sets and Systems*, 158 (2007) 597–618.

[42] ESTEVA F.; GODO, L. Monoidal t-norm based logic: Towards a logic for left-continuous t-norms, *Fuzzy Sets and Systems* 124 (2001) 271–288.

[43] ESTEVA, F.; GODO, L.; HÁJEK, P.; MONTAGNA F. Hoops and Fuzzy Logic, *Journal of Logic and Computation* 13 (2003) 531–555.

[44] ESTEVA, F.; GODO, L.; HÁJEK, P.; NAVARA, M. Residuated fuzzy logics with an involutive negation, *Archive for Mathematical Logic* 39 (2000) 103–124.

[45] ESTEVA, F.; GODO, L.; MONTAGNA, F. The ŁΠ and $\text{Ł}\Pi\frac{1}{2}$ Logics: Two Complete Fuzzy Systems Joining Łukasiewicz and Product Logics, *Archive for Mathematical Logic* 40 (2001) 39–67.

[46] ESTEVA, F.; GODO, L.; MONTAGNA, F. Equational characterization of the subvarieties of BL generated by t-norm algebras, *Studia Logica* 76 (2004) 161–200.

[47] ESTEVA, F.; GODO L.; NOGUERA, C. On rational weak nilpotent minimum logics, *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing* 12 (2006) 9–32.

[48] ESTEVA, F.; GODO L.; NOGUERA, C. On expansions of t-norm based logics with truth-constants, a *Fuzzy Logics and Related Structures* (Gottwald, S.; Hájek, P.; Höhle, U.; Klement, E. P. eds.), 2007, Pendent de publicació.

[49] ESTEVA, F.; GODO L.; NOGUERA, C. On completeness results for predicate Lukasiewicz, Product, Gödel, and Nilpotent Minimum logics expanded with truth-constants, *Mathware & Soft Computing*, 2007.

[50] FERMÜLLER, C. G. Theories of Vagueness Versus Fuzzy Logic: Can Logicians Learn from Philosophers?, *Neural Network World* 13 (2003) 455–466.

[51] FERMÜLLER, C. G. Revisiting Giles' Game, *Logic, Games and Philosophy: Foundational Perspectives*, Prague Colloquium October 2004, Pendent de publicació.

[52] FLAMINIO, T. Strong non-standard completeness for fuzzy logics, *Soft Computing* 12 (2008) 321-333.

[53] FLAMINIO, T.; MARCHIONI, E. T-norm-based logics with an independent involutive negation, *Fuzzy Sets and Systems* 157 (2006) 3125–3144.

[54] FODOR, J. Nilpotent minimum and related connectives for fuzzy logic, *Proc. of FUZZ–IEEE'95*, 1995, pp. 2077–2082.

[55] FONT, J. M. An abstract algebraic logic view of some multiple-valued logics, a *Beyond two: theory and applications of multiple-valued logic*, Physica, 2003, pp. 25-58.

[56] FONT, J. M. Compatibilitat en Àlgebra, en Lògica i en Informàtica, *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques* 22 (2007) 75 – 110.

[57] FONT, J. M.; GIL, A. J.; TORRENS, A.; VERDÚ, V. On the infinite-valued Łukasiewicz logic that preserves degrees of truth, *Archive for Mathematical Logic* 45 (2006) 839–868.

[58] FONT, J. M.; HÁJEK, P. On Łukasiewicz's four-valued modal logic, *Studia Logica* 70 (2002) 157–182.

[59] FONT, J. M.; JANSANA, R.; PIGOZZI, P. A Survey of Abstract Algebraic Logic, *Studia Logica* 74 (2003) 13–97.

[60] FONT, J. M.; RODRÍGUEZ, A. J.; TORRENS, A. Wajsberg Algebras, *Stochastica* Vol. VIII, 1 (1984) 5–31.

[61] GABBAY, D.; METCALFE, G. Fuzzy logics based on $[0, 1)$-continuous uninorms, *Archive for Mathematical Logic* 46 (2007) 425–449.

[62] GALATOS, N.; JIPSEN, P.; KOWALSKI, T.; ONO, H. *Residuated Lattices: an algebraic glimpse at substructural logics*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 151, Elsevier, 2007.

[63] GILES, R. A non-classical logic for physics, *Studia Logica* 33 (1974) 399–417.

[64] GILES, R. A non-classical logic for physics, a Wojcicki, R.; Malinowski, G. (eds.) *Selected Papers on Łukasiewicz Sentential Calculi*, Acadèmia de Ciències polonesa, 1977, pp. 13–51.

[65] GISPERT, J. Estudi algebraic de les extensions dels càlculs multivalorats de Łukasiewicz. Tesi doctoral, Universitat de Barcelona, 1998.

[66] GISPERT, J. Universal Classes of MV-chains with Applications to Many-valued Logics, *Mathematical Logic Quarterly* 48 (2002) 581-601.

[67] GISPERT, J. Axiomatic extensions of the nilpotent minimum logic, *Reports on Mathematical Logic* 37 (2003) 113–123.

[68] GISPERT, J.; TORRENS, A. Quasivarieties generated by simple MV-algebras, *Studia Logica* 61 (1998) 79–99.

[69] GISPERT, J.; TORRENS, A. Axiomatic extensions of IMT3 logic, *Studia Logica* 81 (2005) 311–324.

[70] GÖDEL, K. Zum intuitionistischen Aussagenkalkl, *Anzeiger Akademie der Wissenschaften Wien, Math. naturwiss. Klasse* 69 (1932), 65–66.

[71] GODO, L.; ESTEVA, F.; HÁJEK, P. Reasoning about Probability Using Fuzzy logic, *Neural Network World* 2 (2000) 811–824.

[72] GODO, L.; HÁJEK, P.; ESTEVA, F. A fuzzy modal logic for belief functions, *Fundamenta Informaticae* 57 (2003) 127–146

[73] GOGUEN, J. A. The logic of inexact concepts, *Synthese* 19 (1969) 325–373.

[74] GOTTWALD, S. *A treatise on many-valued logics*, Studies in Logic and Computation, 9 Baldock: Research Studies Press, 2000.

[75] HÁJEK, P. *Metamathematics of fuzzy logic*, vol. 4 in Trends in Logic, Kluwer, Dordrecht, 1998.

[76] HÁJEK, P. Basic fuzzy logic and BL-algebras, *Soft Computing* 2 (1998) 124–128.

[77] HÁJEK, P. Fuzzy Logics with Noncommutative Conjunctions, *Journal of Logic and Computation* 13 (2003) 469–479.

[78] HÁJEK, P. Fleas and fuzzy logic, *Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing* 11 (2005) 137–152.

[79] HÁJEK, P. Making Fuzzy Description Logic More General, *Fuzzy Sets and Systems* 154 (2005) 1–15.

[80] HÁJEK, P. On Arithmetic in Cantor-Łukasiewicz Fuzzy Set Theory, *Archive for Mathematical Logic* 44 (2005) 763–782.

[81] HÁJEK, P. Arithmetical complexity of fuzzy predicate logics – a survey *Soft Computing* 9 (2005) 935–941.

[82] HÁJEK, P.; HANIKOVÁ, Z. A development of set theory in fuzzy logic, a *Beyond two: theory and applications of multiple-valued logic*, Physica, 2003, pp. 273-285.

[83] HÁJEK, P.;GODO, L.; ESTEVA, F. A complete many-valued logic with product-conjunction, *Archive for Mathematical Logic* 35 (1996) 191–208.

[84] HÁJEK, P.; NOVÁK, V. The sorites paradox and fuzzy logic, *International Journal of General Systems* 23 (2003) 373–383.

[85] HÁJEK, P.; PARIS, J.; SHEPHERSON, J. The Liar Paradox and Fuzzy Logic, *The Journal of Symbolic Logic* 65 (2000) 339–346.

[86] HAY, L. Axiomatization of the infinite-valued predicate calculus, *The Journal of Symbolic Logic* 28 (1963) 77–86.

[87] HÖHLE, U. Commutative, residuated l-monoids. In Höhle, U., Klement. E.P. eds., *Non-Classical Logics and Their Applications to Fuzzy Subsets*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1995, pp. 55–106.

[88] HORČÍK, R. Standard Completeness Theorem for ΠMTL, *Archive for Mathematical Logic* 44 (2005) 413–424.

[89] HORČÍK, R. Structure of Commutative Cancellative Integral Residuated Lattices on $(0, 1]$, *Algebra Universalis* 57 (2007) 303–332.

[90] HORČÍK, R. Decidability of Cancellative Extension of Monoidal T-norm Based Logic, *Logic Journal of the IGPL* 14 (2006) 827–843.

[91] HORČÍK, R.; MONTAGNA, F. Archimedean Classes in Integral Commutative Residuated Chains, *Mathematical Logic Quarterly*, Pendent de publicació, 2008.

[92] HORČÍK, R.; NOGUERA, C.; PETRÍK, M. On n-contractive fuzzy logics, *Mathematical Logic Quarterly* 53 (2007) 268–288.

[93] JENEI, S.; MONTAGNA, F. A proof of standard completeness for Esteva and Godo's logic MTL, *Studia Logica* 70 (2002) 183–192.

[94] KEEFE, R. *Theories of Vagueness*, Cambridge University Press, 2000.

[95] Y. KOMORI. Super Łukasiewicz propositional logics, *Nagoya Mathematical Journal* 84 (1981) 119–133.

[96] LING, C. M. Representation of associative functions, *Publ. Math. Debrecen* 12 (1965) 189–212.

[97] ŁUKASIEWICZ, J. O logice trojwartosciowej, *Ruch filozoficzny* 5 (1920) 170–171.

[98] ŁUKASIEWICZ, J.; TARSKI, A. Untersuchungen ber den Aussagenkalkl, *Comptes Rendus de la Societé des Sciences et des Lettres de Varsovie*, cl. iii 23 (1930) 1–21.

[99] MCNAUGHTON, R. A theorem about infinite valued sentential calculi, *The Journal of Symbolic Logic* 16 (1951) 336–348.

[100] MENDELSON, E. *Introduction to mathematical logic*, Chapman & Hall, 1997.

[101] MEREDITH, C. A. The dependence of an axiom of Łukasiewicz, *Transactions of the American Mathematical Society* 87 (1958) 54.

[102] METCALFE G.; MONTAGNA, F. Substructural Fuzzy Logics, *The Journal of Symbolic Logic* 72 (2007) 834–864.

[103] METCALFE, G., OLIVETTI, N., GABBAY, D. Proof Theory for Fuzzy Logics, Research Studies Press, Pendent de publicació, 2008.

[104] MONTAGNA, F. Interpolation and Beth's property in propositional many-valued logics: a semantic investigation, *Annals of Pure and Applied Logic* 141 (2006) 148–179.

[105] MONTAGNA, F.; MARINI, C.; SIMI, G. Product logic and probabilistic Ulam games, *Fuzzy Sets and Systems* 158 (2007) 639–65.

[106] MONTAGNA, F.; NOGUERA, C.; HORČÍK, R. On weakly cancellative fuzzy logics, *Journal of Logic and Computation* 16 (2006) 423–450.

[107] MONTAGNA, F.; ONO, H. Kripke Semantics, Undecidability and Standard Completeness for Esteva and Godo's Logic MTL$\forall$, *Studia Logica* 71 (2002) 227–245.

[108] MONTAGNA, F.; SACCHETTI, L. Kripke-style semantics for many-valued logics, *Mathematical Logic Quarterly* 49 (2003) 629–641.

[109] MONTAGNA, F.; SACCHETTI, L. Corrigendum to "Kripke-style semantics for many-valued logics", *Mathematical Logic Quarterly* 50 (2004) 104–107.

[110] MOSTERT, P. S.; SHIELDS, A. L. On the structure of semigroups on a compact manifold with boundary, *Annals of Math.* 65 (1957) 117–143.

[111] MUNDICI, D. Interpretation of AF C^*-algebras in Łukasiewicz sentential calculus, *Journal of Functional Analysis* 65 (1986) 15-63.

[112] MUNDICI, D. Ulam Games, Łukasiewicz Logic and AFC*-Algebras, *Fundamenta Informaticae* 18 (1993) 151–161.

[113] NOGUERA, C. *Algebraic study of axiomatic extensions of triangular norm based fuzzy logics*, Monografies de l'Institut d'Investigació en Intel·ligència Artificial vol. 27, Barcelona, 2007.

[114] NOGUERA, C.; ESTEVA, F.; GISPERT, J. Perfect and bipartite IMTL-algebras and disconnected rotations of prelinear semihoops, *Archive for Mathematical Logic* 44 (2005) 869–886.

[115] NOGUERA, C.; ESTEVA, F.; GISPERT, J. On some varieties of MTL-algebras, *Logic Journal of the IGPL* 13 (2005) 443–466.

[116] NOGUERA, C.; ESTEVA, F.; GISPERT, J. On triangular norm based axiomatic extensions of the Weak Nilpotent Minimum logic, *Mathematical Logic Quarterly* 54 (2008) 403–425.

[117] NOVÁK, V. On the syntactico-semantical completeness of first-order fuzzy logic. Part I. Syntax and Semantics. *Kybernetika* 26 (1990) 47-66.

[118] NOVÁK, V. On the syntactico-semantical completeness of first-order fuzzy logic. Part II. Main Results. *Kybernetika* 26 (1990) 134-154.

[119] ONO, H. Proof-Theoretic Methods in Non-classical Logic: an Introduction. Theories of Types and Proofs, Takahashi et al eds. *MSJ Memoirs 2*, 1998, 207–254.

[120] ONO, H.; KOMORI, Y. Logics without the contraction rule, *The Journal of Symbolic Logic* 50 (1985) 169–201.

[121] PAOLI, F. *Substructural logics: a primer*, Kluwer Academic Publishers, 2002.

[122] PAOLI, F. A really fuzzy approach to the sorites paradox, *Synthese* 134 (2003) 363–387.

[123] PAVELKA, J. On Fuzzy Logic I, II, III, *Zeitschrift fur Math. Logik und Grundlagen der Math.* 25 (1979) 45–52, 119–134, 447–464.

[124] PLA, J. *Lliçons de Lògica Matemàtica*, PPU, 1991.

[125] RESTALL, G. *An Introduction to Substructural Logics*, Routledge, New York, 2000.

[126] RODRÍGUEZ, A. J. *Un estudio algebraico de los cálculos proposicionales de Łukasiewicz*, Tesi doctoral, Universitat de Barcelona, 1980.

[127] ROSE, A.; ROSSER, J. B. Fragments of many-valued statement calculi, *Transactions of the American Mathematical Society* 87 (1958) 1–53.

[128] SAVICKÝ, P.; CIGNOLI, R.; ESTEVA, F.; GODO, L.; NOGUERA, C. On product logic with truth-constants, *Journal of Logic and Computation* 16 (2006) 205–225.

[129] SCHWEIZER, B.; SKLAR, A. Statistical metric spaces, *Pacific J. Math.* 10 (1960) 313–334.

[130] SCHWEIZER, B.; SKLAR, A. Associative functions and abstract semigroups, *Publ. Math. Debrecen* 10 (1963) 69–81.

[131] SESSA, S.; TURUNEN, E. Local BL-algebras, *Multiple-Valued Logic* 6 (2001) 229–249.

[132] TRILLAS, E. Sobre funciones de negación en la teoría de conjuntos difusos, *Stochastica* 3 (1979) 47–60.

[133] TRILLAS, E.; VALVERDE, L. On some functionally expressable implications for fuzzy set theory, *Proceedings of the 3rd International Seminar on Fuzzy Set Theory 1981*, Linz, 173–190.

[134] VETTERLEIN, T. Regular left-continuous t-norms. Pendent de publicació, 2008.

[135] P. VOJTÁŠ. Fuzzy logic programming, *Fuzzy Sets and Systems* 124 (2001) 361–370.

[136] WHITE, R. B. The Consistency of the Axiom of Comprehension in the Infinite-Valued Predicate Logic of Łukasiewicz, *Journal of Philosophical Logic* 8 (1979) 509–534.

[137] WILLIAMSON, T. *Vagueness*, Routledge, 1994.

[138] ZADEH, L. A. Fuzzy sets, *Information Control* 8 (1965) 338–353.

[139] ZADEH, L. A. Preface, a *Fuzzy Logic Technology and Applications*, R. J. Marks-II, Ed., IEEE Technical Activities Board, 1994.