$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

....

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \dots \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$$

....

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$F_n=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{n-i-1}{i}$$

Fibonacci i els seus números

Vicenç Torra

2011

Índex de continguts

Capítol 1. Fibonacci

Leonardo de Pisa és un dels matemàtics més reconeguts de l'edat mitjana, tot i que és més conegut pel seu sobrenom de Fibonacci.

Fibonacci va néixer al voltant de l'any 1170 i va morir al voltant de 1250. Era fill de Guglielmo Bonacci, d'on li ve el sobrenom. Fibonacci prové d'una contracció de *filius Bonacci*, o en català, fill de Bonacci. El seu pare estava establert a Bugia, una ciutat del nord d'Àfrica, on era un comerciant italià ric, i es pensa que potser també era cònsol de la ciutat italiana de Pisa. Bugia (que correspon a l'actual Bejaïa a Algèria) era una ciutat amb un port comercial molt important i tenia una forta activitat cultural.

En aquell moment en el nord d'Àfrica s'utilitzaven ja de forma habitual els nombres aràbics (els usuals avui en dia), que s'havien inventat a la Índia segles més en darrere. A Europa, en canvi, encara es feien servir els nombres romans per a tot tipus de càlculs. Eren els que s'utilitzaven a les escoles i en el comerç. Molt poca gent sabia en aquell moment a Europa que hi havia una forma diferent d'escriure els números que la romana.

Fibonacci, vivint a Bugia va aprendre els nombres aràbics i com operar-los. Va reconèixer que el sistema de numeració aràbic era més pràctic per operar que el dels romans, que permetia fer els càlculs més fàcilment i més de pressa i que, per tant, eren molt útils per al comerç.

Extensió de la dinastia almohade vers l'època de Fibonacci. Font: Wikipedia.

Bugia, en l'època de Fibonacci pertanyia al sultanat de la dinastia almohade. Aquesta dinastia va enfonsar-se l'any 1240 i aleshores la ciutat de Bugia va passar al domini dels hàfsides. La ciutat va tenir una relació comercial molt important amb diversos estats de la mediterrània. Barcelona i Pisa foren les ciutats amb una relació comercial més estreta.

Se sap que l'any 1259, Barcelona hi tenia un consolat. També se sap que anys més tard, l'any 1307, Ramon Llull hi va predicar i va estar-hi empresonat sis mesos. Vas ser allà on hi va començar a escriure en àrab el llibre "Disputació Raymundi christiani et Hamar sarraceni", però aquest llibre es va perdre perquè en tornar de Bugia Ramon Llull va naufragar i tot i que ell es va salvar, el llibre no.

Durant diversos anys, Fibonacci va viatjar pels països de la mediterrània, va visitar Egipte, Síria i també l'imperi Bizantí i la seva capital Constantinoble (l'actual Istambul, a Turquia). En aquests viatges va poder conèixer millor les matemàtiques musulmanes. Va aprendre com s'operaven els nombres, i diverses maneres de resoldre els problemes matemàtics.

L'any 1200 va torna a Itàlia després dels seus viatges, i al cap de dos anys, l'any 1202, va publicar tot allò que havia après en un llibre. És el llibre titulat "*Liber Abaci*" (això vol dir, *llibre dels càlculs*). Aquest és el llibre més important de tots els que va escriure Fibonacci. Com era normal en aquella època, el llibre el va escriure en llatí.

Tanmateix, Fibonacci va escriure més llibres a banda del "*Liber Abaci*". L'any 1225 va publicar "*Liber quadratorum*", i després el "*Practica geometriae*" (1223), "*Flos*" (1225) i el "*Epistola ad Magistrum Theodorum*" (1225). El "*Liber quadratorum*" inclou problemes d'àlgebra, i el "*Practica geometriae*" explica com resoldre problemes de geometria. Per exemple, en el "*Liber quadratorum*" hi ha el problema que expliquem a continuació. És un problema li va plantejar a Fibonacci un matemàtic de la cort de Federic II, l'emperador del Sacre Imperi Romanogermànic, anomenat Joan.

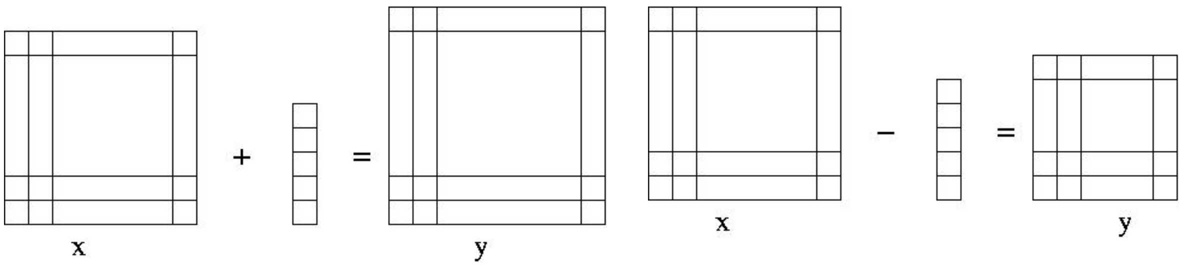
El problema és com segueix.

Trobar un nombre que si l'eleves al quadrat tant si li sumes com si li restes 5 dona un altre nombre al quadrat.

Avui en dia aquest problema s'escriu en matemàtiques com segueix:

Trobar x,y,z enters tals que $x^2 + 5 = y^2$ i $x^2 - 5 = z^2$.

Fibonacci va descobrir que aquest problema no té solució !!



Capítol 2. El “Liber Abaci”

Com s'ha dit abans, el “*Liber Abaci*” és el llibre més important de Fibonacci. El llibre explica en llatí com són els nombres aràbics, com es fan servir per representar quantitats i com cal operar aquests nombres. Això és, com fer sumes, restes, multiplicacions, divisions, etcètera.

Fibonacci va escriure el llibre perquè volia que els nombres que ell havia après al nord d'Àfrica s'utilitzessin a Itàlia. El va escriure tenint en compte que en aquell moment ningú no els coneixia i encara menys saber com fer-los servir per fer els càlculs. El llibre és molt important, perquè va ser el primer llibre escrit a Europa on s'utilitzen aquests números. Fins aquell moment només existien a Europa algunes còpies de traduccions d'un llibre àrab escrit per al-Khwārizmī.

> “Aquí hi ha nou figures dels indis 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.Amb aquestes nou figures i amb el símbol 0 que els àrabs anomenen zèfir, es pot escriure qualsevol número, com es demostrat més avall.” Traducció de l'inici del capítol primer del Liber Abaci de Fibonacci. En l'original en llatí diu: “Novem figure indorum he sunt 9 8 7 6 5 4 3 2 1 Cum his itaque novem figuris, et cum hoc signo 0, quod arabice zephirum appellatur, scribitur quilibet numerus, ut inferius demonstratur.”

El llibre va iniciar una moda en els llibres: les aritmètiques mercantils. Un nou gènere d'obres matemàtiques que va ser molt populars entre el segle XIV i el XVI. Eren llibres que, com el llibre de Fibonacci, s'escrivien per als estudiants. Eren els equivalents als actuals llibres de text. Estaven escrits per a que els estudiants els utilitzessin en les escoles de càlcul i que més tard els estudiants els utilitzessin en les seves feines.

Mitjançant aquests nous llibres, els nombres aràbics van ser més i més utilitzats per la gent, i poc a poc els nombres romans es van deixar de fer servir. Cal dir, però, que quan els comerciants ja feien servir els nombres aràbics en el comerç, les universitats encara seguien utilitzant els nombres romans i feien servir encara els llibres anteriors (basats en els llibres de Boeci de 500 anys abans!!). Durant molt de temps les universitats van seguir així. Com a exemple, en la construcció de la cúpula de la catedral de Florència l'any 1420 hi va participar Giovanni di Bartolo. Giovanni de Bartolo era professor d'una acadèmia de càlcul. La feina en la catedral es va fer sense cap relació amb la universitat.

En aquella època els pocs nens que anaven a escola, asistíen primer a una *escola de gramàtica* on aprenien a llegir i escriure. Aquesta escola la començaven entre els 5 i els 7 anys. Alguns d'ells passaven després, quan tenien 10 o 11, anys a l'*escola de càlcul*. Allí hi estudiaven el l'aritmètica bàsica durant uns 2 o 3 anys més. Aleshores, els estudiants que tenien uns 13 anys podien passar a ser aprenents en tallers o cases de canvi. Uns quants, molt pocs, en lloc de dedicar-se a activitats comercials passava a estudiar els autors clàssics grecs i llatins.

En una ciutat comercial com Florència, l'any 1340 hi havia sis escoles de càlcul amb uns 1000 estudiants. Florència tenia aleshores 100,000 habitants. Si agafem una ciutat catalana actual de la mida de la Florència de 1340, en les classes corresponents[1] hi ha el doble d'estudiants que aleshores. I això que ara la proporció de nens és menor perquè hi ha molta més gent gran que aleshores !!

S'ha dit que el llibre de Fibonacci va iniciar una moda. Catalunya no va ser aliena a aquesta moda. Hi ha un manuscrit català d'aritmètica comercial en una biblioteca de Siena, a Itàlia. És un text anterior al 1500 en el qual hi ha diversos problemes matemàtics.

Problema del Manuscrit 102 (A. .III 27) della Biblioteca degl'Intronati di Siena.

Si volls saber hun home quans diners té en la bossa fe[s] axí, digam qu·n té 4, dir-li has que·lls dobla e seran 8 e puys que·y afiga 5 e seran 13, puys que ho montiplich per 5 e seran 65, ajuste·y 10 e seran 75, puys que ho moltiplich tot per 10 e seran 750; ara abat·ne tu en tu mateix 350 e resten 400 que responen a 4 e és fet que quescun centenar respon a nombre, dons són 400 seran 4.

Text transcrit a G. Arrighi (1982) Due scritti matematici catalani (sec. XV). La Fardelliana 3-5 13-27.

Quan el llibre de Fibonacci va ser publicat l'any 1202 encara no s'havia inventat la impremta. No va ser fins més de 200 anys més tard quan Gutenberg la va inventar. No va ser fins l'any 1455 quan Gutenberg va acabar la impressió de la famosa Bíblia amb el seu nom. Amb l'arribada de la impremta, nous llibres van seguir la moda iniciada per Fibonacci. El primer llibre de matemàtiques imprès a Europa seguia aquesta tradició. Va ser imprès l'any 1478 a la ciutat italiana de Treviso i es titula “Aritmètica mercantil de Treviso”. Es creu que el segon llibre imprès a Europa de matemàtiques és el llibre en català de Francesc Santcliment titulat “*Summa de l'art d'Aritmètica*”. Es va publicar a Barcelona l'any 1487.

1 Basat en l'informe “Projeccions de població en edat escolar 2021 (base 2010)”, publicat l'octubre de 2010, de l'Institut d'Estadística de Catalunya (IDESCAT) que diu que l'any 2010 hi ha 263000 estudiants entre 12 i 15 anys a Catalunya, i comptant que la població de Catalunya és de 7.500.000 persones. Vegeu: http://www.idescat.cat/cat/idescat/publicacions/cataleg/pdfdocs/ppee21b10.pdf

Capítol 3. El problema dels conills

El problema més famós dels que conté el llibre "*Liber abaci*" és el problema dels conills.

> **Els conills de Fibonacci.**
>
> Dos conills acabats de néixer es deixen en un lloc tancat. Aquesta parella de conills cria una nova parella al cap de dos mesos. Cada nova parella en criarà una altra de nova al cap de dos mesos de néixer, i a partir d'aquell moment una nova parella cada mes.
>
> Quants conills hi haurà cada mes?
>
> Liber Abaci II, capítol 12 (pàgina 404 en la traducció anglesa)

El llibre de Fibonacci no només planteja el problema si no que també explica com cal resoldre'l. Per trobar la solució podem tenir en compte que passa cada mes.

- El primer mes tenim una parella.
- El segon mes tenim una parella, però encara no cria.
- El tercer mes tenim la primera parella i com que ja ha criat, tenim una segona parella.
- El quart mes ja tenim les dues parelles anteriors, i com que la primera parella ha començat a criar, una nova parella. Són 3 parelles.
- El cinquè mes tenim les 3 parelles anteriors. De les parelles que tenim, n'hi ha dos que ja poden criar, per tant neixen dues noves parelles. Això fan 5 parelles.
- El sisè mes tenim les 5 parelles anteriors. D'aquestes parelles poden criar totes menys les dos que han nascut el mes anterior. Això fa 3 noves parelles. El total són 8 parelles.
- El setè mes tenim les 8 parelles anteriors. D'aquestes parelles poden criar totes les que no han nascut el mes anterior. O sigui, les 5 que teníem en el més cinc. Per tant neixen 5 noves parelles. En total fan 8+5=13 parelles.
- El vuitè mes tenim les 13 parelles del mes anterior (o sigui les del mes set). D'aquestes poden criar totes les que no han nascut el mes anterior. Són les 8 que teníem en el mes sis. Per tant neixen 8 noves parelles. En total fan 13 + 8 = 21 parelles.
- El novè mes tenim les 21 parelles del mes anterior (les del mes vuit), i d'aquestes només poden criar les 13 del mes set. Per tant neixen 13 noves parelles. En total fan 21 + 13 = 34

parelles.

- El desè mes tindrem les 34 parelles del mes anterior i les cries de les 21 parelles de dos mesos abans. En total seran 34+21=55 parelles.
- El onzè mes tindrem les 55 parelles del mes anterior i les cries de les 34 parelles de dos mesos abans. En total seran 55+34=89 parelles.
- El dotzè mes tindrem les 89 parelles del mes anterior i les cries de les 55 parelles de dos mesos abans. En total seran 89+55=144 parelles

Per calcular el nombre de parelles dels mesos següents, ho faríem de la mateixa manera. En la taula donada més avall hi ha les parelles que tindrem en cada mes, d'acord amb els càlculs que hem fet. Es dona també el nombre de conills que tindrem cada mes, que és clar, és el doble que el nombre de parelles!!

mesos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
parelles	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377
conills	2	2	4	6	10	16	26	42	68	110	178	288	466	710

El nombre de parelles el podem calcular per qualsevol mes que vulguem. Només cal seguir els nostres càlculs mes a mes fins arribar al mes desitjat. Tindrem una successió de números tant llarga com tinguem ganes de calcular. La successió és infinita, com els números naturals.

Els nombres d'aquesta successió són molt coneguts en les matemàtiques i són coneguts amb el nom de nombres de Fibonacci. La successió també és coneguda, és clar, i s'anomena la successió de Fibonacci. Així, la successió de Fibonacci és la successió següent:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...


Retrat de Fibonacci d'autor anònim.

Capítol 4. Els nombres de Fibonacci

La manera habitual de calcular els nombres de Fibonacci en les matemàtiques no és parlant de conills. Es fa de forma més abstracta i més compacta. És a dir, de manera que ens oblidem del detall dels conills, i ens centrem en com es fan els càlculs.

Ara veurem la forma habitual de calcular els números d'aquesta successió. Per començar necessitem definir la notació. Això és, com sabem que estem parlant d'un número de Fibonacci i com sabem de quin mes parlem.

La notació és:

utilitzar la lletra F de Fibonacci i després el número del mes.

Aleshores F_1 correspon al nombre de parelles del primer mes, F_2 correspon al nombre de parelles del segon mes, F_3 al del tercer mes, i així successivament.

Per exemple, el nombre de parelles de conills en el mes 120 (això correspon al nombre de parelles de conills al cap de 10 anys) serà F_{120}.

A més a més, si tenim un número qualsevol n, llavors F_n serà el nombre de parelles de conills en el mes n.

Fent servir aquesta notació, podem escriure de nou la taula anterior com:

mesos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
parelles	F_1=1	F_2=1	F_3=2	F_4=3	F_5=5	F_6=8	F_7=13	F_8=21	F_9=34	F_{10}=55	F_{11}=89	F_{12}=144	F_{13}=233	F_{13}=377

Ara farem servir aquesta manera d'escriure els números de Fibonacci per trobar una regla general per calcular les parelles de conills d'un mes qualsevol. Per fer-ho, ens tornem a mirar ara l'explicació que hem donat abans sobre les parelles de conills en un mes concret. En particular, ens mirem com hem calculat el mes 8. El que s'ha dit mes amunt és el que segueix:

- El vuitè mes tenim les 13 parelles del mes anterior (o sigui les del mes set). D'aquestes poden criar totes les que no han nascut el mes anterior. Són les 8 que teníem en el mes sis. Per tant neixen 8 noves parelles. En total fan 13 + 8 = 21 parelles.

El text explica com hem de calcular el nombre de parelles del mes 8. Diu que el nombre de parelles del mes 8 son les 13 parelles del mes anterior (el mes 7) més les 8 que teníem en el mes 6 (o sigui, les de dos mesos més endarrere).

Aquesta explicació la podem escriure també així:

El nombre de parelles del mes 8 son les parelles del mes 7 + les parelles del mes 6

Fent servir el que s'ha dit més amunt que F seguit del número indica el nombre de parelles en un mes donat, podem reescriure la frase anterior com:

$$F_8 = F_7 + F_6.$$

La forma de calcular tots els mesos és la mateixa, o sigui:

$$F_7 = F_6 + F_5$$

$$F_6 = F_5 + F_4$$

$$F_4 = F_3 + F_2$$

$$F_3 = F_2 + F_1$$

Per tant, com agrada en les matemàtiques, podem escriure una expressió general per a tots els mesos. En el cas general, direm que el mes que volem calcular és el mes n. Aleshores, igual que abans volíem saber F_4 o F_8, ara voldrem saber F_n.

Per a aquest mes qualsevol n, tenim que el nombre de parelles de conills (com hem dit, això és F_n) correspon a la suma del nombre de parelles de conills del mes anterior (F_{n-1}) i el nombre de parelles de conills de dos mesos endarrere (F_{n-2}). D'aquesta manera, l'expressió més general pels nombres de Fibonacci és:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Per poder calcular això per a qualsevol mes, ens cal saber els dos primers, que són:

$$F_1 = 1 \text{ i } F_2 = 1.$$

En matemàtiques la successió de nombres generats d'aquesta manera s'anomena successió de Fibonacci i els nombres de la successió són, és clar, els nombres de Fibonacci.

Resum de les fórmules de la successió de Fibonacci.

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

amb $F_1 = 1$ i $F_2 = 1$.

Les fórmules que hem donat es poden fer servir per a calcular el nombre de parelles en qualsevol mes fàcilment. Tot és una qüestió de fer sumes. Per exemple, podem calcular el nombre de parelles de conills que tindrem en cada mes dels primers tres anys. A continuació es donen els resultats que obtindrem. Són gairebé 15 milions de parelles de conills al cap de 3 anys!!

Primer any	Segon any	Tercer any
$F_1 = 1$	$F_{13} = 233$	$F_{25} = 75025$
$F_2 = 1$	$F_{14} = 377$	$F_{26} = 121393$
$F_3 = 2$	$F_{15} = 610$	$F_{27} = 196418$
$F_4 = 3$	$F_{16} = 987$	$F_{28} = 317811$
$F_5 = 5$	$F_{17} = 1597$	$F_{29} = 514229$
$F_6 = 8$	$F_{18} = 2584$	$F_{30} = 832040$
$F_7 = 13$	$F_{19} = 4181$	$F_{31} = 1346269$
$F_8 = 21$	$F_{20} = 6765$	$F_{32} = 2178309$
$F_9 = 34$	$F_{21} = 10946$	$F_{33} = 3524578$
$F_{10} = 55$	$F_{22} = 17711$	$F_{34} = 5702887$
$F_{11} = 89$	$F_{23} = 28657$	$F_{35} = 9227465$
$F_{12} = 144$	$F_{24} = 46368$	$F_{36} = 14930352$

I si seguim calculant, al cap de 120 mesos tindrem 5358359254990966640871840 parelles de conills !! Això només són 5 anys !!

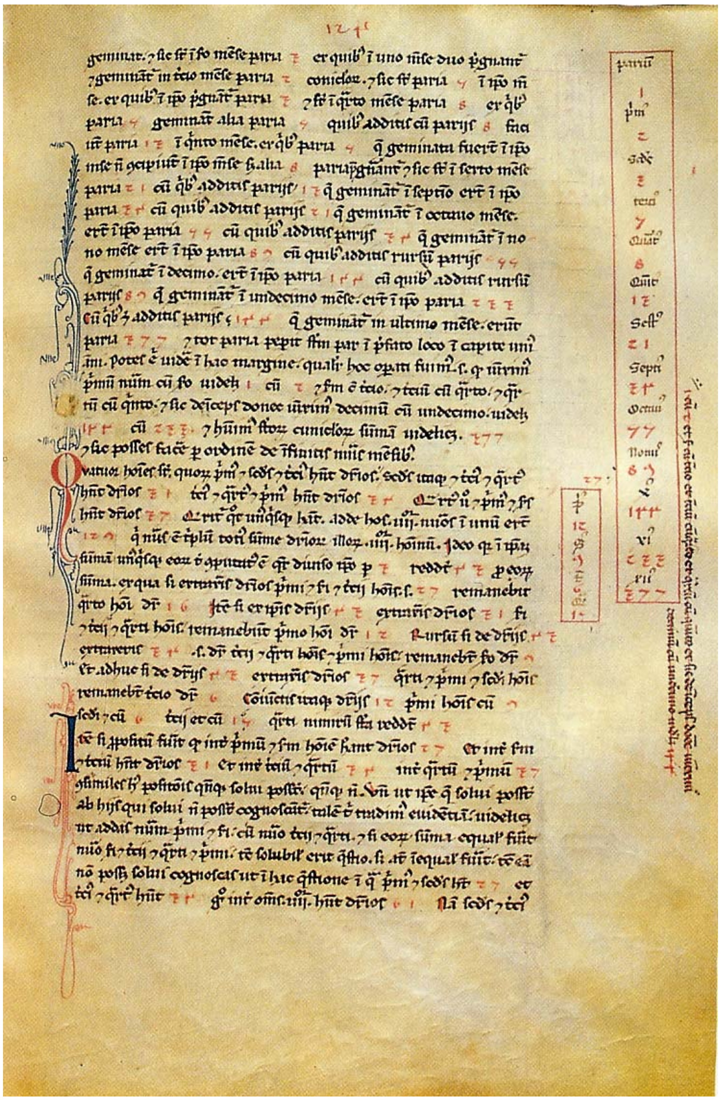
Un programa per calcular els nombres de Fibonacci.

Per calcular el nombre de Fibonacci d'un número gran és més efectiu fer servir un ordinador. Un programa senzill, en el llenguatge informàtic LISP, per calcular els nombres de Fibonacci és el següent:

```
(defun fibonacci (n)
    (if (= n 1) 1
      (if (= n 2) 1
        (+ (fibonacci (- n 1)) (fibonacci (- n 2))))))
```

Aquest programa diu que quan volem el primer número de Fibonacci el resultat és 1, quan volem el segon, el resultat també és 1, i que en tots els altres casos el resultat és la suma dels Fibonacci anteriors.

Tot i que el problema dels conills sembla un problema infantil, la seqüència anterior i els nombres de Fibonacci són molt coneguts en les matemàtiques. Aquests nombres apareixen en molts problemes i això fa que se n'estudiïn les seves propietats. Hi ha fins i tot una revista científica que es titula “The Fibonacci Quaterly” que publica treballs científics sobre els nombres de Fibonacci, les seves propietats i temes relacionats. Aquesta revista és la publicació oficial de l'Associació de Fibonacci.



'*Liber Abaci*' de Fibonacci. Pàgina 124 de la còpia de la Biblioteca Nacional de Florència, on es presenta el problema dels conills i la seva solució. A la banda dreta del text i ha la successió de conills que hi haurà cada mes escrits en xifres aràbigues. Aquests nombres són 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 i 377.

Capítol 5. Algunes propietats dels nombres de Fibonacci

Una vegada hem escrit que hem escrit que un nombre de Fibonacci és la suma dels dos anteriors i sabem que amb l'expressió

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

podem calcular qualsevol nombre de la successió, podem pensar a veure si és possible calcular un nombre de la successió sense haver de calcular els altres.

Això és, podem saber quantes parelles de conills hi haurà en el mes 120 sense necessitat de calcular el nombre de parelles dels mesos 119 i 118?

La resposta és que si. Hi ha una manera de fer-ho. La va descobrir per primera vegada un matemàtic francès que es deia Abraham de Moivre. Tot i que Moivre va néixer a França l'any 1667, va viure a Anglaterra abans dels 20 anys fugint de les persecucions religioses de França. Allà era amic d'Isaac Newton i Edmond Halley (l'astrònom que va establir l'òrbita del cometa Halley). Tot i això, la fórmula no du el seu nom. És coneguda com la fórmula de Binet, perquè Jacques Philippe Marie Binet (un altre Francés, nascut l'any 1876) la va redescobrir.

La fórmula és com segueix:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Calcular F_{120} amb aquesta expressió és més ràpid !!

En aquesta expressió hi apareix un número que s'anomena el *nombre auri* o *nombre d'or.* Aquest número ja era conegut pels grecs fa 2300 anys. La primera definició que es coneix d'aquest número la va escriure l'any 300 aC Euclides en el seu llibre Elements (llibre 6, definició 3). Tot i això, es pensa que els Pitagòrics, també grecs, ja l'havien estudiat abans. Per escriure el nombre auri es fa servir la lletra grega φ. Es va triar aquesta lletra perquè un escultor grec molt reconegut Fidias (en grec, Φειδίας o tot en minúscula φειδίας) la va fer servir.

El nombre auri és el següent:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Fent servir aquest número, la fórmula del nombre de Fibonacci és:

$$F_n = \frac{(\varphi)^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$$

La relació entre els nombres de Fibonacci i el nombre auri no és l'única propietat coneguda. N'hi ha moltes més. Algunes d'elles relacionen elements de la successió amb altres elements de la mateixa successió. Per exemple la propietat següent ens diu el que dóna si sumem n números consecutius:

$$F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$$

Podem fer una prova amb alguns dels números que tenim d'abans. Per exemple, mirem que sumen els 5 primers nombres de Fibonacci. D'acord amb aquesta relació ha de ser:

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = F_7 - 1$$

Veiem que el resultat que ens dóna és correcte:

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 13 - 1$$

Un altre exemple és el següent, on sumem només elements imparells de la successió:

$$F_1 + F_3 + F_5 + ... + F_{2n-1} = F_{2n}.$$

En aquest cas si prenem els 4 primers imparells, ha de donar el número de la posició 8.

$$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 = F_8.$$

Veiem que dóna el que s'espera:

$$1 + 2 + 5 + 13 = 21.$$

Hi ha relacions més complicades, per exemple, sobre els quadrats. En l'exemple següent es sumen els primers n quadrats de la successió:

$$(F_1)^2 + (F_2)^2 + ... + (F_n)^2 = F_n F_{n+1}$$

O fins i tot hi ha relacions que tenen en compte la divisibilitat o el màxim comú divisor. Per exemple, el màxim comú divisor de dos nombres consecutius de la seqüència és 1.

Capítol 6. Els nombres de Fibonacci i el Triangle de Pascal

Els nombres de Fibonacci estan relacionats amb uns altres números. Són els nombres del triangle de Pascal. Abans de veure la relació que hi ha entre els dos, donem les 6 primeres files d'aquest triangle. És un triangle infinit i, per tant, en podríem donar tantes files com volguéssim. Per construir-lo, comencem amb les primeres files, i a partir d'aquestes construïm les següents fent sumes.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

En general, per construir una nova fila es fa com segueix:

Es sumen els parells consecutius de la línia anterior,
i després s'afegeixen dos 1 als extrems.

Així, per a calcular la setena fila del triangle anterior, farem:

Primer.

Fem les sumes: 1+5=6, 5+10=15, 10+10=20, 10+5=15, 5+1=6.

Segon.

Afegim dos uns, un a cada extrem de la secuència 6,15,20,15,6.

Per tant, la nova fila serà:

1 6 15 20 15 6 1

Hi ha una forma matemàtica per representar aquest triangle. La donem a continuació. Cada nombre del triangle s'expressa mitjançant un parèntesis i dos nombres posats un a sobre de l'altre. El de dalt serveix per indicar la fila i el de baix per indicar la posició del nombre dins de la fila. La primera fila és la zero, i la primera posició dins de la fila també és la zero.

Així, per exemple, el número que hi ha en la tercera posició de la quarta fila s'expressa com segueix. Si recordem que hem de començar a comptar des de zero, veurem que en el triangle anterior hi ha un 4 en aquesta posició. Per tant:

$$\binom{4}{3}=4$$

De la mateixa manera, podem pensar en qualsevol altra fila i qualsevol altra columna. Fent servir lletres, podem pensar en la fila número n, i la columna número r. Aquesta posició del triangle s'expressa així:

$$\binom{n}{r}$$

Un avantatge d'aquesta expressió es que podem veure que hi ha relacions (igualtats) que podem expressar fàcilment. Per exemple, abans hem dit que per calcular una nova fila ho fem a partir de la fila anterior. Hem vist que cada número és la suma de dos números consecutius de la fila anterior. Per exemple, en la fila 4, la segona posició és la suma de la segona posició de la fila anterior i de la primera posició de la fila anterior. Això és,

$$\binom{4}{2}=\binom{3}{1}+\binom{3}{2}$$

Abans hem fet un cas particular, però podem fer també un cas general. És el següent:

$$\binom{n+1}{r+1}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}$$

Un altre avantatge de mirar-ho de forma general es que podem pensar en veure si és possible trobar el número que hi ha en una posició determinada sense necessitat de calcular tots els anteriors. Per exemple, quin és el número que hi ha en la posició 327 de la fila 934?

Bé, doncs si que hi ha una manera de calcular això. El resultat es pot aconseguir a partir d'unes quantes multiplicacions i divisions de la manera següent:

$$\binom{n}{r}=\frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times\ldots\times(n-r+1)}{r\times(r-1)\times(r-2)\times\ldots\times 1}$$

Ara podem fer servir aquesta fórmula per calcular el número que hi ha en la posició 327 de la fila 934. Primer hem de posar el 934 en el lloc de la n, i el 327 en el lloc de la r. Si fem aquests canvis a l'expressió de més amunt tenim:

$$\binom{934}{327}=\frac{934\times(934-1)\times(934-2)...\times(934-327+1)}{327\times(327-1)\times(327-2)\times...\times1}$$

Fent unes quantes operacions, tenim que això és el mateix que:

$$\binom{934}{327}=\frac{934\times933\times932\times...\times608}{327\times326\times325\times...\times1}$$

Ara ja només falta multiplicar i dividir. Si fem les multiplicacions del numerador veiem que dóna:

972096886141939247944304140659811829579604755650733905400386070180874148093352264335197308005650
576349903200201556939699514363948258710390901209612816617127545693961170500329775173258350250761
971356462049420003128005168419134896423520583972259736876063548461847149601023848238644897809645
248905105371734835949436428817947653525649857138778019626920274788022099106034252168423672060497
010369037215250977754802883698665628379483282488629144929583231543589325286818791543250249913690
386996808565757624889544392694776033376399837091906241075923403657267110801257077030176712834285
184686568749452623392645629767500238395239013213648160246347580863617042378503016680359946587986
453270740791926042187772810401093783835362559259283527269150571122488469056361437945809659426915
919518053027178034001366733144642657891144500784818561853758616599260699227200464589235945472000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000

I si fem les multiplicacions del denominador veiem que dóna:

793038048562541163327275241529530294488636688110761173318477848002985844676500367110776386160007
682570183049219230585337796578096578034029558928586916319000063225984710573658907936670944198367
182638167690804373351717327765419246997463171000029928017929314878038182747882804301739602078274
640017369662106758938304865956202324528878902610335226409818076380921946186653580294839370648241
328971475836936263412759033389081358636298034806869560543288781704139544013849389065158551361821
306889341347364533236540412577800372558631205383347779023342029888483600150842297427190392473240
084806302005573987220848640000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000

Dividint aquests dos números obtenim el resultat que voliem:

122578845731798076751482819832817814945586869835337526153617554927476108893745629822238319240173
755945669407867442628139307530560293736241505067835827234786803424989160262476333402916751411282
68972461847159374621549596037326340099301415184387059748019544148048 00

És una sort no haver de calcular les files anteriors per calcular aquesta !!

6.1. Una excursió pel factorial

L'expressió que hem posat abans no és prou elegant, vegem-la de nou:

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)...1}$$

Com que les matemàtiques a més a més de servir per calcular intenten ser elegants, i també ser breus, hi ha una forma resumida de dir el mateix. Es fa servir una operació que es diu el factorial. El factorial d'un número es calcula multiplicant tots els números enters positius des de l'1 fins aquell número. Per exemple, el factorial de 5 es calcula multiplicant 1, per 2, per 3, per 4, i per 5. Això dóna 120.

Per indicar que calculem el factorial fem servir el símbol d'admiració !

Exemple. 5! vol dir 120

Els factorials dels números creixen molt de pressa. Això es pot veure a continuació, que es donen els 10 primers factorials.

1!	2!	3!	4!	5!	6!	7!	8!	9!	10!
1	2	6	24	120	720	5040	40320	362880	3628800

Per veure que aquesta operació creix molt de pressa, només cal veure un dels números que ha sortit abans. “*Només*” era el factorial de 327!!

327 ! =

793038048562541163327275241529530294488636688110761173318477848002985844676500367110776386160007
682570183049219230585337796578096578034029558928586916319000063225984710573658907936670944198367
182638167690804373351717327765419246997463171000029928017929314878038182747882804301739602078274
640017369662106758938304865956202324528878902610335226409818076380921946186653580294839370648241
328971475836936263412759033389081358636298034806869560543288781704139544013849389065158551361821
306889341347364533236540412577800372558631205383347779023342029888483600150842297427190392473240
0848063020055739872208486400000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
0000000000

Mitjançant el factorial podem escriure l'expressió d'abans d'una forma una mica més elegant:

$$\binom{n}{r} = \frac{\left(\frac{n!}{(n-r)!}\right)}{r!}$$

O, encara millor:

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Així, per l'exemple d'abans

$$\binom{934}{327}=\frac{934!}{327!(934-327)!}$$

Un programa per calcular el factorial.

Naturalment calcular els factorials de nombres grans a mà és cansat. És millor que ho faci un ordinador. Un programa en el llenguatge informàtic LISP per fer això és el següent:

```
(defun fact (n) (if (= n 0) 1 (* n (fact (- n 1)))))
(defun comb (n r) (/ (fact n) (* (fact r) (fact (- n r)))))
```

El meu ordinador triga 0.036 segons en fer el càlcul que hem fet abans. Per fer-ho, li hem de dir:

```
(comb 934 327)
```

Ara podem reescriure l'arbre fent servir la notació matemàtica que hem vist ara. El triangle de Pascal tindrà la forma que segueix. Naturalment, la primera fila del nou triangle és la primera fila del triangle anterior. La segona fila correspon a la segona fila del triangle anterior, i així successivament.

Per completar el triangle posem al final l'expressió general per calcular cada número sense els altres.

Fent-ho així, ens queda com un arbre!!

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

....

$$\binom{n}{0} \quad \binom{n}{1} \quad \binom{n}{2} \quad \ldots \quad \binom{n}{n-1} \quad \binom{n}{n}$$

on

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

6.2. Una relació entre Pascal i Fibonacci

La presentació de l'arbre l'hem feta per establir una relació entre els nombres de Fibonacci i els nombres que apareixen en el triangle de Pascal. La relació es veu més fàcilment si posem els números alineats a l'esquerra. En aquest cas, si sumem els números en diagonal veiem que surten els números de la successió de Fibonacci.

En la taula que donem a continuació es donen els nombres del triangle de Pascal fins a la fila 6 alineats d'aquesta manera, i la suma de les primeres 7 diagonals (que són els números de Fibonacci). Les diagonals s'han marcat en gris, i el número de Fibonacci corresponent té el fons del mateix color que la diagonal.

1		1						
1		1	1					
2		1	2	1				
3		1	3	3	1			
5		1	4	6	4	1		
8		1	5	10	10	5	1	
13		1	6	15	20	15	6	1

Per exemple, pel cas de la setena diagonal, tenim:

$$F_7=\binom{7-0-1}{0}+\binom{7-1-1}{1}+\binom{7-2-1}{2}+\binom{7-3-1}{3}=\binom{6}{0}+\binom{5}{1}+\binom{4}{2}+\binom{3}{3}=1+5+6+1=13$$

Aquesta relació es pot escriure de manera general com segueix:

$$F_n=\sum_{i=0}^{\infty}\binom{n-i-1}{i}$$

En aquesta expressió el símbol Σ vol dir que fem una suma. El símbol ∞ correspon a l'infinit. El que vol dir és que si sumem tots els números de la diagonal des del primer (que és el zero) fins al final (que representem amb l'infinit), dona un número de Fibonacci. En aquesta suma d'infinits valors, els que no hi son en la taula, els prenem com a zero.

Referències

Vajda, S. (1989) Fibonacci & Lucas numbers, and the golden section, Ellis Horwood

Vorobyov, N. N. (1973) Los números de Fibonacci, Limusa-Wiley

Wikipedia (2010)